理論天体物理学特論 I

牧野淳一郎

2000 年 4 月 17 日

目 次

第1章　はじめに

この講義では、天体物理学の扱う主要な対象の一つである自己重力多体系の進化について、その概要を扱うことにしたい。具体的には以下のようなトピックを扱う。

- 支配方程式（無衝突ボルツマン方程式）
- 球対称の力学平衡モデル
- ジーンズ不安定と力学平衡への緩和過程
- ２体緩和
- 重力熱力学的不安定と重力熱力学的振動
- 自己重力多体系におけるカオス
- 外場の影響

これらは、open clusters, globular clusters, galaxies, clusters of galaxies, large scale structures など、要するに大抵の天文学の対象の力学的な進化（構造の発達など）を考える上での基本となるものである。なお、実際の研究の現場においては、多くの場合数値シミュレーションが道具として使われることになるので、その方法論と問題点についても何回か触れることにしたい。

1.1　参考書など

参考書としては

- Binney, J. and Tremaine S., Galactic Dynamics, Princeton University Press, 1987
- Spitzer, Lyman, Jr., Dynamical Evolution of Globular Clusters, Princeton University Press, 1987.

をあげておく。

1.2　事務的な話

評価はレポートである。講義中にいくつかの課題をだして、そのなかから興味に応じて問題をいくつか選んで解いてもらうということにする。なお、非線形性の強いシステムが主題である関係上、プログラムをつくって数値計算することが必要になる場合もあるかもしれない。

1.3　本題

今日は、一回目ということでとりあえず無衝突ボルツマン方程式を導いてその振舞いについて少し考える。

済みません、初回は準備が間に合ってなくて、、、以下は板書でやりました。

第2章　力学平衡

2.1　力学平衡とジーンズの定理

前回は、とりあえず無衝突ボルツマン方程式を導いて、それがどういうものかを少し考えるということをした。もう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \tag{2.1}$$

ここで f は 6 次元位相空間での分布関数であり、 Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho. \tag{2.2}$$

ここで、 G は重力定数であり、 ρ は空間での質量密度

$$\rho = m\int d\boldsymbol{v} f, \tag{2.3}$$

である。

なお、以下の議論では （当分） m のことは忘れて、その代わり f が個数密度ではなくて質量分布であるということにしておく。

今日は、これらから、まず、「力学平衡状態」とはどう定義され、どういう性質があるかということを考え、それから具体的な平衡状態の例を見ていくことにする。

まず、「力学平衡」とは何かということだが、これは、上の無衝突ボルツマン方程式とポアソン方程式を連立させたものの定常解、すなわち、時間的に変化しない解ということになる。従って、ある分布関数 f が力学平衡にあるということは、それによって決まるポテンシャル Φ を固定して考えた時に、f の時間微分が 0 になるということである。

ここで、わざわざ「力学」とつけるのは、もちろん平衡状態にはほかにもいろいろあるからである。もっとも重要なのは熱平衡の概念であるが、これはまた後で。

2.2　運動の積分

平衡状態というものを考える上で基本になるのは、「運動の積分」という概念である。ポテンシャル Φ のもとで、ある $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ の関数 I が運動の積分であるとは、その上で

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.4}$$

がなり立つことである。つまり、実際にすべての粒子の軌道について、その上でその量が変化しないということである。ちょっと変形すれば

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla I - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \tag{2.5}$$

これと、上の無衝突ボルツマン方程式を比べてみると、すぐわかるように時間微分が落ちているだけである。

なお、「運動の積分」というときの流儀は 2 通りあって、一般に運動の保存量のことを「運動の積分」という流儀もあるが、ここでは位相空間の座標だけの関数であって同時に保存量であるものをさす。具体的には、たとえば 1 次元調和振動子で「初期の位相」というのは保存量だが運動の積分ではない。これは、時間が入ってくるからである。

2.2.1 例

エネルギー $1/v^2+\Phi$ や、ポテンシャルが球対称 (r だけの関数) の場合の角運動量ベクトル $\mathbf{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ は運動の積分である。

2.3 ジーンズの定理

さて、上のように I を定義すると、以下の「ジーンズの定理」がなり立つことがわかる。

ジーンズの定理 任意の無衝突ボルツマン方程式の定常解は、運動の積分を通してのみ位相空間座標に依存する。逆に、任意の運動の積分の関数は定常解を与える。

いいかえると、分布関数 f が定常であるためには、運動の積分 $I_1, I_2, ..., I_m$ があって $f=f(I_1, I_2, ..., I_m)$ の形で書けることが必要十分ということ。

証明だが、まず「定常ならば運動の積で書ける」というほうを考えてみる。これは、f 自体が運動の積分の定義を満たしているので、OK。

逆のほうは、実際に f の全微分を I_kで書き下せば、それぞれが 0 になるということからいえる。

というわけで、これはなかなか強力な定理だが、一般の場合にはそれほど役に立つわけではない。というのは、ポテンシャルを与えた時に一般に運動の積分というのは 5 個あるはずだが、それらをすべて知っているということはないからである。

ただし、球対称とか軸対称とか条件をつけると、いろいろちゃんと決まるようになる。以下、まず球対称の場合を考える。

2.4 球対称の場合

球対称の場合、運動の積分はエネルギーと角運動量の 3 成分で 4 つある。一般にはもう一つあるが、これは特別な場合を除いてあまり意味がないので、定常な分布関数はエネルギーと角運動量だけで書けると思っていい。

いちおう、ここで、意味がないというのはどういうことかということを説明しておく。そのためには、意味がある特別な場合というのを考えるのがよい。これは、ケプラー軌道のような、軌道が閉じる場合である。この時には、エネルギーと角運動量の他に、軌道全体の向きを表す量 (近点経度) が保存する。これはちゃんと保存量になっている。

しかし、一般には軌道が閉じない。このときでも、近点経度に対応するような保存量が実は存在しているが、それにも関わらず、ある軌道がエネルギーと角運動量で決まる部分空間を覆ってしまう

(数学的には、もちろんすべての点を覆えるのではなく、任意の点について、いくらでも近くにいけるというだけだが)。こうなっていると、その積分に分布関数が依存すると、連続性とか微分可能性とかに困難を生じることになる。

さて、f は E と $\mathbf{J}$ によるということにしたわけだが、いま球対称な場合ということなので $\mathbf{J}$ の方向にではなく、絶対値だけに依存するのでないといけない。したがって、実は球対称の分布関数は一般に $f(E, J)$ と書けるということになる。

我々が扱いたいのは自己重力系なので、実際にこれを球対称の場合に書き下してみると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi G\int f\left(\frac{1}{2}v^2+\Phi, |\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|\right)d\boldsymbol{v}, \tag{2.6}$$

てな感じになる。

2.5 $f(E)$ の場合

上の場合でもまだちょっと大変なので、さらに単純化してとりあえず J にもよらない場合というのを考えてみる。これには、なかなか特別な、空間上の各点で速度分散が等方的であるという性質がある。これはどういうことかというと、一般にある方向の速度分散というのは

$$< v_e^2 >= \frac{1}{\rho}\int v_e^2 f(v^2+\Phi)d\boldsymbol{v} \tag{2.7}$$

となるが、f が v の絶対値にしかよらないので、v_e の方向にこの積分はよらない。まあ、速度分散がとかいうより、速度分布自体が等方的なのだから当然ではある。

以下、扱いやすくするために変数をとり直す。

$$\Psi = -\Phi+\Phi_0, \qquad \mathcal{E} = -E+\Phi_0 = \Psi - v^2/2 \tag{2.8}$$

ここで Φ_0 は定数で、普通は $\mathcal{E} > 0$ で $f > 0, \mathcal{E} \leq$ で $f = 0$ となるようにとる。

これらを使って、さらに v の角度方向に渡って積分すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) &= -16\pi^2 G\int_0^{\sqrt{2\Psi}} f(\Psi-\frac{1}{2}v^2)v^2 d\boldsymbol{v} \\ &= -16\pi^2 G\int_0^{\Psi} f(\mathcal{E})\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}d\mathcal{E}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

これで、一般に f を与えて Ψ を求めるとか、あるいはその逆とかが出来る。

ただし、Ψ を与えて f を求めようってときには、求まった f が $f \geq 0$ の条件を満たすという保証はないので、そういうのは物理的には意味がない解ということになる。

2.6 球対称な分布関数の例

ここであげるのはあくまでも例であるが、さまざまな理由からその性質がよく調べられているものである。

2.6.1　ポリトロープとプラマーモデル

ある意味でもっとも簡単な分布関数の例は、$\mathcal{E}$ の冪乗（パワー）で書けるものである。例えば

$$f(\mathcal{E})=\begin{cases} F\mathcal{E}^{n-3/2} & (\mathcal{E}>0) \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{2.10}$$

これから、まず密度を Ψ の関数として求められる（$v^2=2\Psi\cos\theta$ なる変数変換のあと）。で、答えは

$$\rho=c_n\Psi^n \quad (\Psi>0) \tag{2.11}$$

となる。ただし、c_nが有限になるためには $n>1/2$ でないといけない。

上を使ってポアソン方程式から ρを消去すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right)+4\pi Gc_n\Psi^n=0 \tag{2.12}$$

変数を適当にスケーリングして

$$\frac{1}{s^2}\frac{d}{ds}\left(s^2\frac{d\psi}{ds}\right)+\psi^n=0 \tag{2.13}$$

としたものを Lane-Emden 方程式と呼ぶ。

実際には、上の Lane-Emden 方程式を解かないとポテンシャルや密度がどうなっているかはよくわからない。で、一般の n ではこの方程式には初等的な解はないが、$n=5$ の場合には解があることが古くから知られている。これは

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}s^2}} \tag{2.14}$$

の形をしている。これが Lane-Emden 方程式を満たしていることは各自確かめること。さらに、密度は $c_5\phi^5$で与えられることになる。

密度が $r=0$ で有限で、$r\to\infty$ で $1/r^3$より速く落ちるので、質量は有限である。

これは、天文学的になにか素晴らしいものであるというわけではないが、球状星団のうち中心密度が低いものにはまあまあ似ていなくもない。とりあえず、これの意味は、解析関数で簡単に書ける自己重力系の self-consistent なモデルであるということである。

プラマーモデルは、いろんなシミュレーションの初期条件として使われることが多い。

2.6.2　Hernquist Model

プラマーモデルはその存在が前世紀から知られているが、こちらは論文が発表されたのが 1990 年（というわけで、Binney & Tremaine のときにはまだ知られていなかった）という、非常に新しいモデルである (Hernquist, L., 1990, ApJ 356, 359)。これは、ポテンシャルを

$$\Phi=-\frac{1}{r+a} \tag{2.15}$$

で与える。密度分布は

$$\rho=C\frac{a^4}{r(r+a)^3} \tag{2.16}$$

で書ける。分布関数は求まっているが、めんどくさいのでここには書かない。とりあえず、密度とポテンシャルがコンシステントになっていることは確認してみよう。なお、一般に球対称ならば

$$\frac{d\Phi}{dr} = GM_r/r^2 \tag{2.17}$$

であることに注意。これは、単に半径 r のところでの重力加速度である。

Hernquist Model には、「$r^{1/4}$則をかなり良く再現する」という著しい特徴がある。

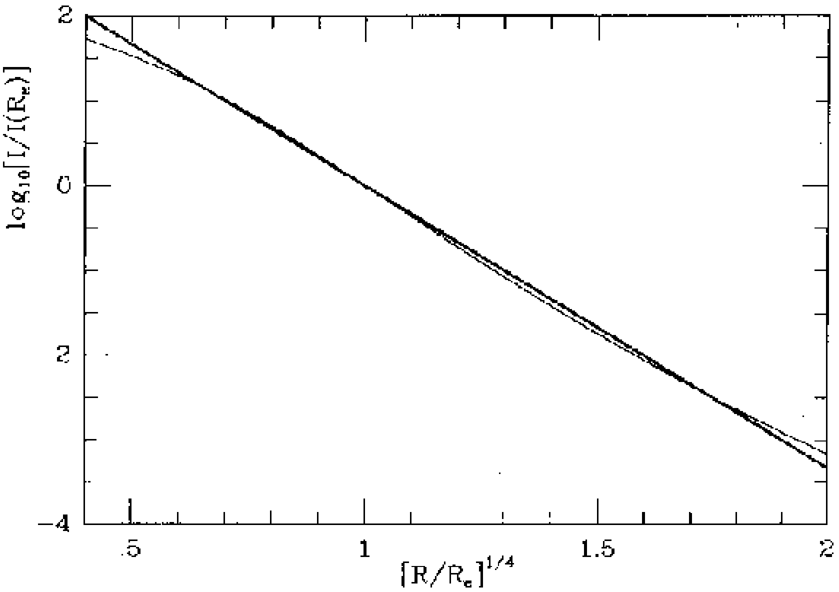


FIG. 4. Surface brightness profiles for the $R^{1/4}$ law (*thick curve*) and the present model (*thin curve*) as a function of $(R/R_e)^{1/4}$. Surface brightness is normalized to its value at R_e where R_e refers separately to the effective radii of the two models.

$r^{1/4}$則については後でその物理的解釈も含めて詳しく議論することにしたいが、要するに、観測される楕円銀河の表面輝度の対数（要するに等級ですね）が、半径の 1/4 乗に対して直線にのって見えるというものである。この性質と、一応解析関数で分布関数が書けるということのために、楕円銀河やダークハローのモデルとして広く使われるようになってきている。

ただし、このモデルにはいくつか妙な性質もあり、それについてもまた後で触れることになるはずである。

2.6.3 等温モデル

前回、無衝突ボルツマン方程式の定常解は熱平衡とは限らないし、そもそもエントロピーが発生しないのだから系が熱平衡に向かって進化するとも限らないという話をした。が、後で出てくるようないくつかの理由から、熱平衡状態について良く理解しておくことは結構大事である。熱平衡状態では（古典統計なので）分布関数はマックスウェル–ボルツマン分布、すなわち

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{2.18}$$

で与えられなければならない。まず、例によってこれを速度空間で積分して密度をポテンシャルの関数として表す。この時に誤差関数についての

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = 1 \tag{2.19}$$

を使うと、

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \tag{2.20}$$

ポアソン方程式にこれを入れると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{2.21}$$

従って、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -4\pi G\sigma^2\rho \tag{2.22}$$

後はこれを数値的に解くわけだが、まず、一つ特別な解があるということを指摘しておく

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \tag{2.23}$$

は、上の方程式を満たし、解の一つとなっている。これを singular isothermal sphere と呼ぶ。これは self consistent なモデルではない。というのは、質量が $M_r \propto r$ となって有限ではないからである。が、例えば銀河ハローの中心部、あるいは楕円銀河についても中心部についてはこれで比較的良く近似できるものもあるということがわかっている。

特に、渦巻銀河については、「回転速度が中心からの距離に（あまり）依存しない」(いわゆる flat rotation curve) という性質が知られていて、これを説明するためには上のような $\rho \sim 1/r^2$のダークハローが必要であるということになっている。

特別ではない解は、中心密度を有限にして中心から外側に向かって解いていけばいい。この時でも、$r \to \infty$ の極限では singular isothermal に近付く。

流体との関係

等温モデルは、エントロピー極大であり、分布関数がボルツマン分布になっているという特別な性質がある。このため、等温ガス球と実は同じ構造をとる。以下、ガス球について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -rho\frac{GM_r}{r^2} \tag{2.24}$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_B T}{m}\rho \tag{2.25}$$

を使って P を消して、さらに M_r を微分してみれば、係数を別にして

$$C\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2 \tag{2.26}$$

要するに、 stellar system とガスで同じ方程式になっている。

なお、ポリトロープでも、ポリトロピックな状態方程式を持つガス球の密度分布と stellar system のそれとは一致する。が、等温モデルの場合とは実は本質的な違いがある。等温モデルの場合は、分布関数そのものが一致する（ボルツマン分布であり、局所的にも大局的にもエントロピー最大）が、一般のポリトロープではそんなことはない（そもそもガス球ではジーンズの定理が成り立たないし、局所的にはボルツマン分布であるから）。

第3章　等温モデル、キングモデル、β モデル

前回は、球対称な力学平衡モデルの例として、Plummer model, Hernquist model とそのバリエーション、等温モデルについて簡単に説明した。今日は、物理的に重要である等温モデルの性質と、等温モデルの重要なバリエーションについて説明する。まず、流体の等温分布との関係を扱い、それから有限質量になるように分布関数に変更を加えた King model を扱う。

そのあと、2 成分系のなかでもっとも簡単な、等温モデルで表現される恒星系のなかに、それに比べて質量が小さい等温ガスがトラップされているという場合を考えてみる。これは、銀河団のガスの非常によいモデルであるとされ、現在も解析の基本的な仮定となっている。実際にどのような扱いをしているか、その問題点についても触れることにしたい。

3.1　等温モデル

3.1.1　流体との関係

等温モデルは、エントロピーの一次の変分が 0 であり、分布関数がボルツマン分布になっているという特別な性質がある。このため、等温ガス球と実は同じ構造をとる。以下、ガス球について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM_r}{r^2} \tag{3.1}$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_BT}{m}\rho \tag{3.2}$$

を使って P を消して、さらに M_r を微分してみれば、

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -\frac{4\pi Gm}{k_BT}\rho r^2 \tag{3.3}$$

要するに、stellar system とガスで同じ方程式になっている。

この時、実際に「分布関数も同じ」ということに注意してほしい。つまり、速度分布、したがって速度分散も同じになっているわけである。

なお、ポリトロープでも、ポリトロピックな状態方程式を持つガス球の密度分布と stellar system のそれとは一致する。が、等温モデルの場合とは実は本質的な違いがある。等温モデルの場合は、分布関数そのものが一致する（ボルツマン分布であり、局所的にも大局的にもエントロピー最大）が、一般のポリトロープではそんなことはない（そもそもガス球ではジーンズの定理が成り立たないし、局所的にはボルツマン分布であるから）。

3.2 King Model

等温モデルは、すでに述べたように熱平衡 (エントロピーの変分が 0) という重要な意味を持つ定常解ではあるが、なにしろ質量が無限大であり現実に存在しないのでちょっと困るところがある。なにか適当な仮定を置くことで、「おおむね等温モデルであり、なおかつ有限の大きさをもつ」というものを考えることはできないだろうか ?

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{3.4}$$

上の分布関数で、質量が発散する理由は何かを思い出してみよう。その本質的な理由は、分布関数がエネルギー無限大 ($\mathcal{E} \rightarrow -\infty$) まで 0 にならないことにある。

有限の質量のものが自己重力でまとまっているためには、すべての粒子のエネルギーが負でないといけないので、これでは自己重力系が表現出来ないのはある意味では当然のことといえる。

それならば、ある有限のエネルギー以上のものはないことにしてしまえばいい。そのやり方にはいろいろあり得るが、とりあえず Lowered Maxwellian と呼ばれる以下のようなものを考える

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}(e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & (\mathcal{E} \leq 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

これは $\mathcal{E} = 0$ で $f = 0$ となるように、 1 を引いたというだけである。これしか方法がないというわけではないが、これは扱いやすいこともあってもっともよく使われている。

例によって、まず速度空間で積分すれば

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{4\pi\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{2\Psi}} \left[\exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) - 1\right] v^2 dv \\ &= \rho_1 \left[e^{\Psi/\sigma^2} \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\Psi}{\sigma}}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}}\left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで erfは誤差関数で、積分が有限区間であるために出てくる。最後の項は 1 引いている分の寄与である。ちなみに

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \tag{3.7}$$

これでポテンシャルの関数として密度が求まったので、あとはポアソン方程式に入れて数値的に解くだけである。ただし、 King model の場合境界条件についてすこしきちんと考える必要がある。

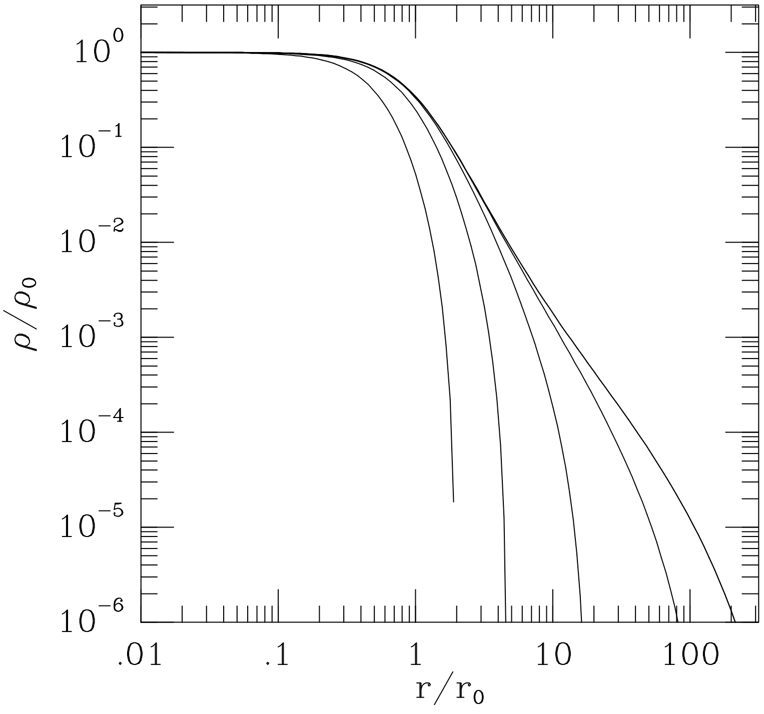
半径方向の分布は、中心から無限遠まで与えられるわけであるが、実は外側の境界をどうとるべきかはちょっと自明ではないので、とりあえず中心から初期値問題として解くことを考える。

初期条件としては、まず $d\Psi/dr = 0$ とする、すなわち、中心密度が有限の解を考える。 Ψ_0 は任意に選べるので、これの値によっていろいろな解がでてくる。

これは実際に数値的に解いてみたものの例である。速く落ちるものから、Ψ_0 が 1, 3, 6, 9, 12 と変えてみてある。

なお、横軸のスケールの r_0は、

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}} \tag{3.8}$$



として無次元化するのに使っている。これは、いわゆる「コア半径」というのとそこそこ一致するということになっている。通常、キングモデルのコア半径というときにはこれをさす。観測的には、中心の表面輝度の 1/2 になるところとするのが普通である。

グラフからわかるように、有限の半径 r_t で ρは 0 になる。これは、解いていったときに Ψ が 0 になってしまうためである。この半径のことを King model の tidal radius 潮汐半径という。このモデルのばあい、Ψと本当のポテンシャル Φ の間に以下のような簡単な関係が成り立つことに注意。

$$\Phi = -\frac{GM}{r_t} - \Psi \tag{3.9}$$

ここで M は系の全質量である。

King Model は、球状星団のプロファイルのモデルとして非常によく使われている。なお、$c = \log(r_t/r_0)$ のことを concentration parameter といって、観測データにキングモデルを合わせた論文では普通これがパラメータになる。理論計算では Ψ_0 が使われるので、ちょっとややこしいことが多い。

3.3 多成分系の例

さて、今まで、単に無衝突ボルツマン方程式の球対称定常解というものの例をいろいろ見てきたわけだが、ちょっと飽きてきたので目先を変えてみよう。具体的には、「球対称の恒星系のなかでのガスの分布」というものを考えてみることにする。というのは、現在観測データの解釈に使われているモデルは、現在までにやった範囲で十分カバーできるものになっているからである。

多くの銀河団には高温ガスが存在しており、X 線で観測可能である。

上は Einstein IPC による Hydra A 銀河団に (David et al. ApJ 1990, 356, 32) の像である。あと、

EINSTEIN OBSERVATIONS OF HYDRA A　33

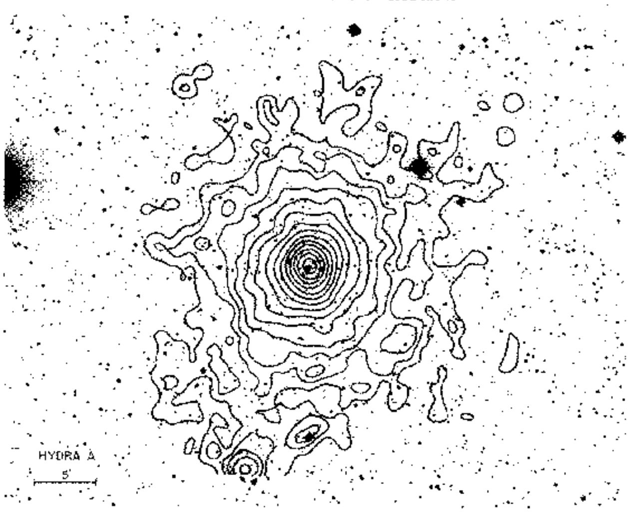


FIG. 1.—*Einstein* IPC isointensity contours of the Hydra A cluster superposed on the optical image of the cluster. The contour levels correspond to 3, 5, 7, 10, 14, 19, 25, 32, 40, 49, 59, 70, 82, and 95 σ above background. The fluxes in the inner and outer contours are $3.3 \times 10^{-[illegible]}$ and 1.4×10^{-4} IPC counts s^{-1} arcmin^{-2}.

ROSAT の観測とか 「あすか」のとか見たことがある人も多いと思うが、まあだいたいこんな感じにきれいに丸いのが普通である。X 線ガスの振舞いについての詳しい話は Sarazin の教科書かなにかを見てもらうとして、とりあえず重要なのは、

- (観測出来る範囲で) ほぼ等温である
- (異論がないわけではないが) ほぼ静水圧平衡にある

ということである。この 2 つの仮定をつかっていろいろしらべていくことにしよう。

まず、話を簡単にするために、

- ガスの自己重力は無視できる

ということにする。これは、銀河団なんかだとちょっと怪しいが、まあ全然だめというほど悪くはない。さらに、

- 恒星系は等温分布である

とする。だんだん、ほんとかなあという気がしてくることと思うが、まあ、研究の現場というのはそういうものです。

さて、これぐらいたくさん仮定すると、美しい理論を構築できることになる。まず、ガスの速度分散と恒星系の速度分散が等しい場合というのを考えてみる。ガスの密度ρ_gが従う方程式は、星の密度を ρ_s として

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho_g}{dr}\right) = -\frac{4\pi Gm}{k_BT}\rho_s r^2 \tag{3.10}$$

と書けるわけだが、ρ_s 自体がこの方程式の解になっている。すると、これは ρ_gの対数についての微分方程式なので、

$$\rho_g = C\rho_s \tag{3.11}$$

というのが解になっている。中心で微分が 0 とすれば他の解はない。つまり、どこでもガスと星の

密度比が等しいというのが平衡状態になる。この時は、もちろん、ガスの自己重力を考慮しても平衡状態の分布の形は変わらない。

では、温度（速度分散）が違う場合はどうなるかが問題である。ガスの温度T_gと、恒星系に対応する「温度」T_sの比を$T_g/T_s = 1/\beta$と置くと、ガスの密度が従う方程式は、

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho_g}{dr}\right) = \beta[\text{式 (3.10) の右辺}] \tag{3.12}$$

と書けるわけだが、この解というのはもちろん（！）

$$\rho_g = C\rho_s^\beta \tag{3.13}$$

で与えられる。すなわち、対数でグラフに書いて縦にβ倍したものが、解の形を表しているわけである。一般に、温度が高ければ等温解に比べて傾きが緩くなり、低ければより急になるわけである。

3.3.1 βモデル

と、ここまではちゃんと正しい話をしてきたが、実際に観測結果の解釈に使う時にはさらに大胆な近似がなされる。以下、Sarazin の X-ray emissions from clusters of galaxies 5.5 節に従っていわゆるβモデルについて説明し、その問題点について検討する。

式 (3.13) はもちろん正しいし、有用なものではあるが、あまり使い回しがよくない。というのは、ρ_sのほうがそもそも数値的にしか求まっていないからである。というわけで、ρ_sをなにか解析関数で置き換えることを考える。さて、以下の質量分布

$$\rho = \rho_0[1+(r/r_c)^2]^{-3/2} \tag{3.14}$$

を考えてみると、これは$r < 2.5r_c$程度ならば等温解の非常によい近似になっている。（遠くにいくとどんどんずれるが）これを恒星系の分布と思えば、ガスの分布は

$$\rho = \rho_0[1+(r/r_c)^2]^{-3\beta/2} \tag{3.15}$$

と解析関数で書けることになって都合がよろしい。さらに、X 線で観測するということを考えると、実際に観測されるのは X 線の強度で、これは密度の 2 乗を視線方向で積分したものと思っていい。つまり

$$I(r) = 2\int_0^\infty \rho(\sqrt{r^2+z^2})^2 dz \tag{3.16}$$

となるわけだが、これは積分できて、

$$I(r) = C[1+(r/r_c)^2]^{-3\beta+1/2} \tag{3.17}$$

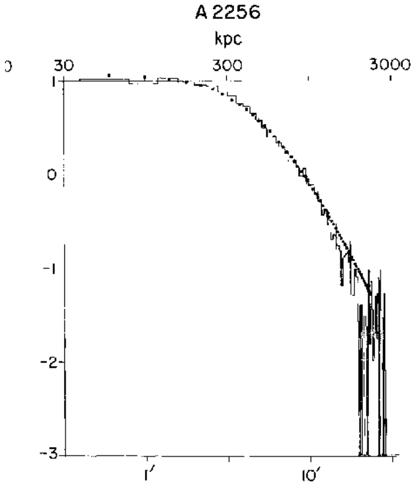
となる。定数はいろいろ出てくるけど省略。

左はうまくいく例である (Jones and Forman 1984)。右は先ほど見せた Hydra A

これらはそれなりに典型的なものだが、もう一例最近の論文 (Ikebe et al. 1997, ApJ 481, 660) をあげておくと

とまあ、こんな感じになる。

いくつかの観測結果をこのようにβモデルでフィットした結果から、以下のような問題があるということになっている。



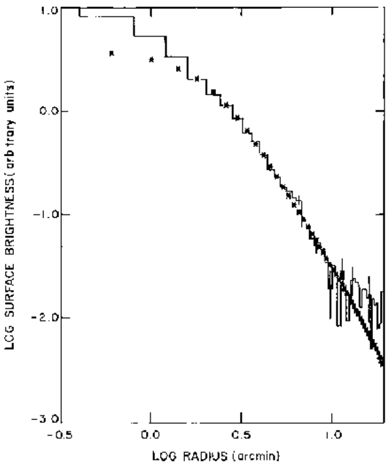


FIG. 2.—*Einstein* IPC radial X-ray surface brightness profile of the Hydra A cluster. Crosses are the model, continuous line is the data.

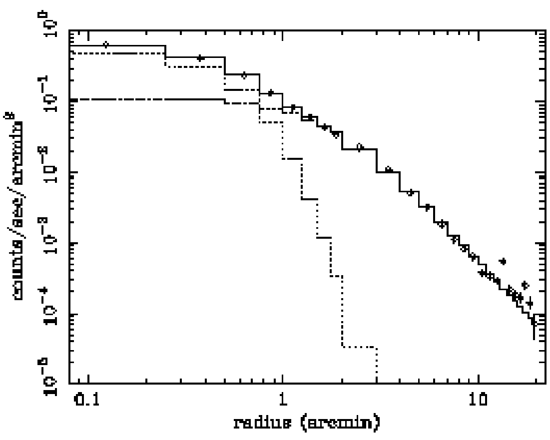


FIG. 8.—Background-subtracted PSPC radial profile fitted with the double β model. Open circles represent the data, and histograms the models.

- かなり多くの銀河団、とくにコア半径の小さいものでは、βモデルでフィットするとコアの付近に超過 excess が出る。これは普通、「低温成分」(いわゆる Cooling flow) として理解されている。
- 一般に、スペクトルと銀河の速度分散から決めたβのほうが、βモデルの βよりも 2 倍くらい大きめにでる。

これが問題であるかどうかについては、例えば以下のようなことも考慮する必要があろう。

- Cooling flow cluster はコアが小さく、明らかにβモデルによるフィットが適当ではないところに無理にβモデルを当てはめている
- 恒星系の分布が isothermal かどうかは怪しい

と、いうわけで、レポート用課題 (1)

(1-1) 正しい等温分布に対して、X 線ガスの表面輝度がどうなるかを求めよ。βのいくつかの値に

ついてやってみること。

(1-2) 上で求めたガスの表面輝度を Jones & Forman (ApJ 1984, 276, 38) での Einstein の観測結果と比べて、大雑把（目でみて）でよいからβの値を求め、Jones & Forman の値と比較せよ。

(1-3) 恒星系の分布が等温ではない時の等温ガスの密度をポテンシャルの関数としてあらわせ。

(1-4)Hernquist model の場合に、X 線ガスの表面輝度はどのようになるか求めよ。なお、半径無限大で発散する場合は、適当な半径で分布を打ち切ってよい。

第4章　非等方モデル、ビリアル定理

前回は、等温モデルの変形で、有限質量としたキングモデルと、それから多成分系の例として球対称等温な恒星系の中での等温ガスの分布を扱った。今日は、非等方モデルの簡単な例をあげ、それからモデルを離れて恒星系の平衡状態の一般的な性質について考える。

4.1　非等方モデル

非等方ということは、分布関数が $f(E,L)$ の形で書けるということである。まず、密度 ρがどう書けるかを考えてみよう。一般の分布関数で、密度は単に f を速度空間全体で積分したもの

$$\rho = \int f(\mathcal{E}, L) d^3\mathbf{v} \tag{4.1}$$

である。速度を極座標 (v, η, ψ) を使って

$$v_r = v\cos\eta, \quad v_\theta = v\sin\eta\cos\psi, \quad v_\phi = v\sin\eta\sin\psi \tag{4.2}$$

とすれば、角運動量の定義から

$$\rho = 2\pi\int_0^\pi \sin\eta d\eta \int_0^\infty f(\Psi - v^2/2, |rv\sin\eta|)v^2 dv \tag{4.3}$$

となる。

4.1.1　Osipkov-Merritt モデル

一般に f が L に依存するしかたというのは無限にあるわけだが、以下、そのなかで割と扱いやすいものとして、分布関数が

$$Q = \mathcal{E} - \frac{L^2}{2r_a^2} = \Psi - \frac{1}{2}v^2\left(1 + \frac{r^2}{r_a^2}\sin^2\eta\right) \tag{4.4}$$

の関数として書ける場合というのを考えてみるこれは Osipkov-Merritt モデルと呼ばれるものである。この時、上の密度の速度空間における積分を Q でかきかえると

$$\rho = 2\pi\int_0^\pi \sin\eta d\eta \int_0^\Psi f(Q)\frac{\sqrt{2(\Psi - Q)}}{[1 + (r/r_a)^2\sin^2\eta]^{3/2}}dQ \tag{4.5}$$

となる。($Q \le 0$ なら $f(Q) = 0$ とした）ここで、とても素晴らしいことに

$$\int_0^\pi \frac{\sin\eta d\eta}{[1 + (r/r_a)^2\sin^2\eta]^{3/2}} = \frac{2}{1 + (r/r_a)^2} \tag{4.6}$$

となるので、上の積分は

$$\left(1+\frac{r^2}{r_a^2}\right)\rho(r) = 4\pi\int_0^{\Psi} f(Q)\sqrt{2(\Psi-Q)}dQ \tag{4.7}$$

という具合になって、これは実は $f(E)$ の時の式

$$\rho(r) = 4\pi\int_0^{\Psi} f(\mathcal{E})\sqrt{2(\Psi-\mathcal{E})}d\mathcal{E}. \tag{4.8}$$

と非常に良く似た形になり、f を与えればρを求めることができる。

4.1.2 ρ から f へ（等方）

非等方分布などを実際に、例えば観測データの説明として使うためには、与えられた密度に対して、それを実現するような分布関数を作るという作業が必要になる。これを、まず $f(E)$ の場合についてやってみて、Osipkov-Merritt モデルの場合にも応用してみる。

式 4.8 で、密度が至るところ正ならば Ψは r の単調な関数なので、 ρを Ψの関数と思って、両辺を Ψで微分すれば

$$\frac{1}{\sqrt{8}\pi}\frac{d\rho}{d\Psi} = \int_0^{\Psi}\frac{f(\mathcal{E})d\mathcal{E}}{\sqrt{\Psi-\mathcal{E}}} \tag{4.9}$$

これは Abel の積分方程式になっていて、以下の解を持つ

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\frac{d}{d\mathcal{E}}\int_0^{\mathcal{E}}\frac{d\rho}{d\Psi}\frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E}-\Psi}} \tag{4.10}$$

ちょっと書き替えれば

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\left[\int_0^{\mathcal{E}}\frac{d^2\rho}{d\Psi^2}\frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E}-\Psi}} + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\left(\frac{d\rho}{d\Psi}\right)_{\Psi=0}\right] \tag{4.11}$$

例として、Jaffe model

$$\rho = \frac{r_J^4}{r^2(r+r_J)^2}, \quad \Psi = -\ln\left(\frac{r}{r+r_J}\right) \tag{4.12}$$

を考えてみる。 Hernquist model でも同様に出来るけど、こっちの方が式が簡単なので。まず、 r を Ψで表してそれを ρの式に入れると、

$$\rho = (e^{\Psi/2} - e^{-\Psi/2})^4 \tag{4.13}$$

これを式 4.11 に入れればいいわけだが、 $x = \sqrt{\mathcal{E}-\Psi}$ （ただし、$\mathcal{E} = -Er_j/GM$ ）を積分変数にすれば、

$$f(E) = \frac{M}{2\pi^3(GMr_J)3/2}\left[F_-(\sqrt{2\mathcal{E}}) - \sqrt{2}F_-(\sqrt{\mathcal{E}}) - \sqrt{2}F_+(\sqrt{\mathcal{E}}) + F_+(\sqrt{2\mathcal{E}})\right] \tag{4.14}$$

但し、

$$F_{\pm} = e^{\mp x^2}\int_0^x e^{\pm x'^2}dx' \tag{4.15}$$

4.1.3 ρ から f へ (Osipkov-Merritt)

さて、ちょっと疲れて来たかも知れないが、式 4.7 と式 4.8 が左辺に $1+(r/r_a)^2$がつく以外は同じ形をしていたということを思い出して欲しい。式 4.11 は式 4.8 の解であったわけなので、今

$$\rho_Q = \left(1+\frac{r^2}{r_a^2}\right)\rho \tag{4.16}$$

と置いてやれば式 4.11 と全く同じ形、つまり

$$f(Q) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2}\left[\int_0^Q \frac{d^2\rho_Q}{d\Psi^2}\frac{d\Psi}{\sqrt{Q-\Psi}} + \frac{1}{\sqrt{Q}}\left(\frac{d\rho_Q}{d\Psi}\right)_{\Psi=0}\right] \tag{4.17}$$

の解があることになる。例えば Jaffe model であれば、前節と同様にして分布関数を今度は Q の関数として求めることができる。

最後に、Osipkov-Merritt モデルの性質について少し考えてみる。分布関数が $Q=\mathcal{E}-L^2/(2r_a^2)=\Phi_0-(E+L^2/(2r_a^2))$ によるということは、$f(E,L)$ の等高線が放物線になっているということである。中心近くでは、どうせ L の取り得る値の範囲が狭いので、実は等方的な場合とあまり変わらない。これに対し、外側の $E=0$ に近いところでは、等方の場合から大きくずれる。

ずれ方は、通常の f は E の減少関数なので、 L^2 についてもそうなり、外側にいくほど circular に近い軌道が減り、radial に近い軌道を持つ粒子が相対的に増えることになる。

このような傾向は、例えば楕円銀河などの形成過程についてのいろいろなシナリオで自然に起きること (そのうちに扱う) であり、理論的に調べられている非等方モデルは大抵上のような角運動量でカットオフを持つようなモデルになっている。

なお、非等方性の重要な観測的応用として、楕円銀河の中心部の構造のモデルがあるが、これについては後で時間があれば触れることにしたい。

4.2 Jeans Equations

ここまでは、 Collisionless Boltzman 方程式から出発して、 Jeans の定理を使って球対称な恒星系のモデルをいろいろ見てきた。これから 2 回程度、Collisionless Boltzman 方程式のいろいろな平均 (モーメント) をとることによって恒星系の性質を見ていくことにする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{4.18}$$

Collisionless Boltzman 方程式は式 4.18 で与えられるが、これをまず速度空間全体で積分してみる。と、まず第 3 項は発散定理によって表面積分に置き換えられ、$|v|\rightarrow\infty$ の極限で f は十分速く 0 にいくので (普通は有限の $|v|$ で 0 になってないと、自己重力的にならない)、結局 0 になる。最初の 2 項は

$$\nu = \int f d^3\mathbf{v};\, \bar{v}_i = \frac{1}{\nu}\int f v_i d^3\mathbf{v} \tag{4.19}$$

と置いてやれば (密度と、局所的な平均速度)

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{4.20}$$

これは、流体の場合の連続の式と同じものである。さらに、速度の1次のモーメントをとるために Collisionless Boltzman に v_jを掛けて積分してみると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f v_j d^3\mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0, \tag{4.21}$$

というような式が出てくる。但し、 i についての和をとっていることに注意。

さて、$v_j f$ について発散定理（1次元）を使えば

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = -\int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\mathbf{v} = -\delta_{ij}\nu \tag{4.22}$$

となるので、結局

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \tag{4.23}$$

但し、 $\overline{v_i v_j}$は $v_i v_j$の局所平均である。もうちょっと見通しの立つ式にするために、まず連続の式を使って第一項から $\partial\nu/\partial t$ を消すと

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \tag{4.24}$$

さらに、

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} \tag{4.25}$$

を使って書き直すと

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \tag{4.26}$$

これは、流体の場合のオイラー方程式（運動方程式）と大体同じ格好になっている。左辺は平均の流れに沿ってみた平均速度の Lagrange 微分であり、右辺第一項はポテンシャルから力である。

最後の項は普通なら圧力の項が出てくる。流体と違うのは、ここが非等方的な stress tensor σ_{ij}^2になっているということである。

なお、いうまでもないが、速度分布が等方的であれば stress tensor は$\sigma^2 I$ （I は単位行列）の形に書ける。さらに、等方的でない場合には、σ^2は対称テンソルなので適当な座標系の回転により対角化出来る。例えば $f(E,L)$ で書ける時には、一つの軸を原点に向けてとれば対角化されるわけである。

4.2.1　例 :球対称恒星系の M/L

密度分布が球対称で平均の流れがない場合、極座標系での Jeans equation は以下の形に書き直せる：

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r}\left[2\overline{v_r^2} - \left(\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2}\right)\right] = -\nu \frac{d\Phi}{dr} \tag{4.27}$$

（証明は、、、まあ、面倒なだけなので省略）もうちょっと話を簡単にするために、等方的な場合を考えると、結局

$$\frac{1}{\nu}\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{4.28}$$

すなわち

$$M(r) = -\frac{r\overline{v_r^2}}{G}\left(\frac{d\ln \nu}{d\ln r} + \frac{d\ln \overline{v_r^2}}{d\ln r}\right) \tag{4.29}$$

つまり、密度と速度分散の半径方向の分布がわかれば、質量分布が決まるということになる。

ここで注意してほしいのは、νは質量を反映していないもの、例えば星の数とか、あるいは単位体積あたりの luminosity の分布でも構わないということである。これは、もともとの Collisionless Boltzman 方程式は保存する量であればなんでもなり立つからである。さらに、球対称、等方を仮定したので、表面輝度分布や視線方向速度分布から輝度密度と速度分散の空間分布を求められるので、これらから「実際にどれだけの質量があるはずか」を求められるわけである。これから、M/L の空間分布が決まることになる。楕円銀河の中心に大質量ブラックホールがあるというような話は、もっとも簡単にはこのようにして質量を推定する。

なお、逆に、M/L を一定として、速度の非等方性の空間分布を求めることもできる。多くの、中心に大質量ブラックホールがあるとされている楕円銀河で、非常に非等方性の高い速度分布を作れば観測された密度と速度分散の分布が説明できないわけではないということが示されている。

4.3　ビリアル定理

前節では、Collisionless Boltzman 方程式の速度空間でのモーメントを考えて Jeans 方程式を導いた。ここではさらに空間全体のモーメントをとる。

式 4.23 において、密度 νを質量密度 ρで置き換え、さらに x_kを掛けて空間全体で積分する。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial t} d^3\mathbf{x} = -\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathbf{x} - \int \rho x_k \frac{\partial\Phi}{x_j} d^3\mathbf{x} \tag{4.30}$$

右辺の最初の項は、例によって発散定理を使って書き直せる。

$$\int x_k \frac{\partial(\rho\overline{v_i v_j})}{x_i} d^3\mathbf{x} = -\int \delta_{ki}\rho\overline{v_i v_j} d^3\mathbf{x} = -2K_{kj} \tag{4.31}$$

これは、運動エネルギテンソル K の定義を与える。ついでに第二項はポテンシャルエネルギーテンソル W と呼ばれるものである。

さらに、σ^2の定義を使って、

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \tag{4.32}$$

但し

$$T_{jk} = \frac{1}{2}\int \rho\bar{v}_j\bar{v}_k d^3\mathbf{x}, \quad \Pi_{jk} = \int \rho\sigma_{jk}^2 d^3\mathbf{x}, \tag{4.33}$$

さらに、j,k についての式と k,j についての式を足してやると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathbf{x} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{4.34}$$

さらに、慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \int \rho x_j x_k d^3\mathbf{x} \tag{4.35}$$

を導入して、連続の式とか発散定理とかを使うと

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int \rho(x_k\bar{v}_j + x_j\bar{v}_k) d^3\mathbf{x} \tag{4.36}$$

で、結局

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{4.37}$$

これをテンサービリアル定理という。

さて、今定常状態　(I の時間微分が 0) を考え、さらに上の式のトレースをとってみると、T, Π の定義からこれらの寄与は全運動エネルギー K の 2 倍になる。W の方は、Φの定義を使えば

$$W = \int \rho \sum_k x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} d^3\mathbf{x} = \int\int \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{x_k(x_k - x'_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \tag{4.38}$$

ここで $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$を入れ換えた積分を書き、両方を足すと

$$W = \frac{1}{2}\int\int \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \sum_k \frac{(x_k - x'_k)^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\int \rho\Phi d^3\mathbf{x} \tag{4.39}$$

というわけで、 W は系の全ポテンシャルエネルギーである。結局、

$$2K + W = 0 \tag{4.40}$$

が成り立つ。これを、スカラービリアル定理、または単にビリアル定理という。

今、系の全エネルギーを E とすれば、 $E = K + W$ であるから、

$$E = -K = W/2 \tag{4.41}$$

ということになる。つまり、定常状態にある自己重力恒星系では、必ず全エネルギーはポテンシャルエネルギーのちょうど半分であり、絶対値が運動エネルギーに等しい。これは球対称とかそういう仮定なしに常に正しい。

第5章　ビリアル定理の応用、ジーンズ不安定

前回は、球対称非等方モデルの計算できる例として Osipkov-Merritt モデルを扱い、モデルから離れた自己重力質点系の一般的な性質ということでモーメント方程式、具体的には速度空間でのモーメントをとったジーンズ方程式と、さらに空間でのモーメントをとって得られるビリアル定理を導いた。今日は、まず、前半でビリアル定理のいくつかの応用例を示し、それで平衡状態についての話はおしまいにする。

今日の後半から 2-3 週で、力学平衡に至る進化の一般的な性質についてどんなことがいえるかを考える。まず、今日は、不安定な平衡状態からの進化の性質を考えるということで、無限一様な仮想的な恒星分布を考えた時に、それがどのように振舞うかを考える。

5.1　ビリアル定理の応用

5.1.1　系の「比熱」

これまで何度か強調してきたように、無衝突ボルツマン方程式 CBE で記述されるシステムの力学平衡状態は熱平衡ではないし、自己重力系は熱平衡ではありえない。しかし、 King model のように近似的に熱平衡なものもあるので、ここでエネルギーの出入りに対する系全体の応答、つまり比熱というものをちょっと考えてみることにする。

ビリアル定理から $K = -E$ であったので、すぐにわかるように「エネルギーを奪うと運動エネルギーが増え、逆ならその逆になる」ということになっている。つまり、見かけ上比熱が負になっている。

これは重力が効く系では普通のことで、例えば地球を回る人工衛星といったものでも同様のことが起こっているわけである。

この、「見かけ上比熱が負」ということが、熱力学的不安定を通して構造形成（自己組織化）が起きる基本的な理由である。

5.1.2　系の質量、 M/L

まず、系の「大きさ」についてどんなことがいえるかということをおさらいしておく。W は全ポテンシャルであったので、定義により以下のように書ける：

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{5.1}$$

今、粒子の質量がすべて等しい場合（あるいは、分布関数が質量によらない場合）を考えると、

$$r_v = \left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right\rangle^{-1} \tag{5.2}$$

を導入して、

$$W = \frac{-GM^2}{2r_v} \tag{5.3}$$

と書ける。この r_v を普通ビリアル半径という。なお、$r_g = 2r_v$ のことを gravitational radius 重力半径ということもあるが、「重力半径」というと時と場合によってはシュワルツシルト半径だったりすることもあるので注意すること。とにかく、この r_v を使って、$K = -W/2$ を書き直せば

$$|v^2| = \frac{GM}{2r_v} = \frac{GM}{r_g} \tag{5.4}$$

したがって、速度分散（系全体の平均）とビリアル半径がわかれば質量を決められる。観測的には、球対称を仮定すれば、3 軸方向の速度分散は等しいので、視線方向の速度分散の 3 倍が 3 次元速度分散ということになる。問題はビリアル半径のほうであるが、もちろん球対称（だけでは本当はだめで、さらに M/L が半径によらずに一定であるという仮定も必要）を仮定すれば表面輝度分布から deprojection して計算できる。

大雑把な見積りでよければ、例えば half mass radius（質量の半分が入っている半径）r_h を適当に見積もって、それで r_v の代わりにしてもそれほど大きな誤差はない。典型的には

$$r_h \simeq 0.8 r_v, \tag{5.5}$$

程度である。具体例をあげれば、プラマーモデルでは

$$r_h = \frac{3\pi}{16\sqrt{2^{2/3}-1}} r_v = 0.77 r_v, \tag{5.6}$$

ハーンキストモデルでは

$$r_h = \frac{(1+\sqrt{2})}{3} r_v, \tag{5.7}$$

であり、仮想的な密度一様の球というものを考えると

$$r_h = \frac{3 \times 2^{2/3}}{5} r_v = 0.95 r_v. \tag{5.8}$$

というようなことになる。実際に観測から直接決められるのは、多くの場合 r_h ではなく有効半径 effective radius r_e であり、これは質量ではなくて投影した輝度の半分が入っている半径である。一般に $r_e < r_h$ であることはいうまでもないが、まあ、それほど大きな差にはならない。

5.1.3 回転系の偏平度（あるいは楕円銀河の回転）

今、z 軸まわりに対称な、回転している銀河を考えると、ポテンシャルテンソルについては対称性から

$$W_{xx} = W_{yy}; \quad W_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \tag{5.9}$$

で、運動エネルギについても同様にクロスタームは消えるので、結局テンサービリアル定理で残るのは

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0; \quad 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \tag{5.10}$$

の 2 つだけである。この 2 つから、

$$\frac{2T_{xx}+\Pi_{xx}}{2T_{zz}+\Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \tag{5.11}$$

となる。今、子午面環流みたいなのはないとすれば、 $T_{zz}=0$ で、

$$2T_{xx} = \frac{1}{2}\int \rho v_\phi^2 d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2}Mv_0^2 \tag{5.12}$$

(これは v_0、つまり平均の回転速度の定義と思って下さい)。同様に

$$\Pi_{xx} = M\sigma_0^2 \tag{5.13}$$

これは視線方向 (横から見ているとして) のランダム速度の平均 (r.m.s) である。あと、 z 方向についてはなにかいえないかというと、 x 方向との速度分散の異方性パラメータ δ を導入して

$$\Pi_{zz} = (1-\delta)\Pi xx \tag{5.14}$$

と書いておくことにする (これは、先週扱った球対称な系の速度分散の異方性とはまったく違ったものであることに注意)。これらをまとめると、

$$\frac{v_0^2}{\sigma_0^2} = 2(1-\delta)\frac{W_{xx}}{W_{zz}} - 2 \tag{5.15}$$

ということになる。

さて、 W_{xx}/W_{zz}と、銀河の 形」の関係についてであるが、一般に密度が以下のように書ければ

$$\rho = \rho(m); \quad m^2 = a_1^2\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2} \tag{5.16}$$

言い換えれば、密度が軸比一定の楕円体の表面上で一定なら、W_{ii}/W_{jj}は a だけの関数で $\rho(m)$ の関数形によらないということがわかっている。実際に書くとかなり面倒な形をしているので、具体的な形は BT をみてもらうことにして、結果だけを使うと、要するに速度の非等方性δ と偏平度 $\varepsilon 1-b/a$ を決めれば $\frac{v_0}{\sigma_0}$ が決まるということになる。どんな感じかを BT の図から示すと まあこんな感じになる。上の図は、 εの関数として $\frac{v_0}{\sigma_0}$ がどう変化するかを、 δ のいくつかの値について示したものである。破線は、真横でない方から見たらどういうふうになるかを、いくつかの場合について示したものである。下の図は、実際の観測結果と $\delta=0$ の線を重ねて書いてみたものである。暗い楕円銀河は $\delta=0$ の線に近いところに集まっているのに対し、明るいものは可能な範囲全体にあり、どちらかというと下の方 (回転が小さく、おそらく異方性が大きいほう) に集まっているということが見てとれる。このような構造の違いは、それぞれの銀河がどうやってできたかということになにか重要な手がかりを与えているはずである。

とはいうものの、どうやってできたかということに対する標準的な理解というものがあるわけでは必ずしもない。ここでは、せっかくなので一つの考え方として、合体説 (楕円銀河のうち、特に大きいものは銀河同士の合体でできた) をとった場合にはどのような説明が可能かということを見てみる。これ以外の解釈がないというわけではない。

これは Okumura *et al.* (1991, PASJ 43, 781) によるシミュレーションの結果と上のグラフを重ねたものである。シミュレーションはすべて 2 つの等方的で回転を持たないプラマーモデルを 2 つ放物軌道でぶつけたもので、番号順に最初の軌道の近点距離が大きくなる (4 で $r_p/r_h=2.6$ である)。

大雑把にいうと、番号の大きいものほど軌道角運動量が大きいので、v_0/σ_0が大きくなる。もっとも、ある程度より大きくなっていないことに注意してほしい。これは要するに合体するためにはかなりの軌道角運動量を捨てないといけないので、残った系が持つ角運動量には上限があるためである。

合体後の銀河は特別な場合 (1,7) を除いて3軸不等なので、その3方向からみてグラフ上に点をとり、それを結んで3角形を書いている。大雑把にいって、適当な方向からみたときにはこの3角形の中にあると思っていい（実際にある方向から見た時にどう見えるかというのはもうちょっとややこしいが、いまはそのあたりの議論は省く）。

シミュレーションの結果からわかることは、仮に楕円銀河が合体で出来たとすれば、暗いものは初期に近点距離の大きな軌道（おそらく楕円軌道）をもち、明るいものは近点距離の小さな軌道から合体したものが比較的多いということになろう。

5.2　ジーンズ不安定

ここまで、自己重力多体系の平衡形状を（ごく簡単な場合だけ）扱ってきたが、そろそろ飽きてきたような気もするので、これからは平衡形状ではなく時間発展について考えることにしたい。

時間発展といっても、もとの方程式が強い非線形性を（加速度の項に）持つので、一般的な場合を解析的に扱うなんてことはほとんど出来ない。そこで、まず、平衡状態から無限小だけずれている場合に対して線形化した発展を考えるということにする。さらに、話を簡単にするために、「無限一様」な平衡状態とし、まずCBEではなく流体の話を考える。

5.2.1　流体のジーンズ不安定

流体は、連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{5.17}$$

オイラー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \Phi \tag{5.18}$$

ポアソン方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{5.19}$$

で記述される。あ、あと状態方程式がいる。これはいま圧力が密度だけの関数で与えられるとする。（断熱でも等温でもなんでもいいが）

今、$\rho, p, \mathbf{v}, \Phi$ をそれぞれ $\rho = \rho_0 + \rho_1$ という格好にして、添字0がつくものはもとの方程式の平衡解であり、1がつくものは小さい（二次以上の項を無視していい）として方程式を書き直すと

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0) = 0 \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{5.21}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \tag{5.22}$$

$$p_1 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_1 = v_s^2 \rho_1 \tag{5.23}$$

ここで v_s は音速である。

既に述べたように、無限一様でいたるところ密度、圧力が等しいというのが平衡で、速度も 0 だったとすると、上の 2 本は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \tag{5.25}$$

となる。下 2 本は見かけはかわらない。これを、 ρ_1 だけの式にすれば

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \tag{5.26}$$

さて、めでたく方程式が線形化されたので、分散関係を求めれば算数はおしまいだが、まずその前にどういう方程式かということを見ておこう。

最初の 2 項をみれば普通の波動方程式で、最後の項がポアソン方程式を通してでてくる重力の項である。したがって、波長が短い極限では普通の波動方程式に近付く。これに対し、波長が長い極限では空間 2 階微分の項が効かなくなるので、線形の常微分方程式になってしまう。

実際に分散関係を求めるために、解を

$$\rho_1 = C e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \tag{5.27}$$

として代入すれば

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \tag{5.28}$$

ということになる。したがって、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \tag{5.29}$$

と書くと、

- $k > k_J$ なら ω は実数。この時は解は振動的（普通の音波と同じ）
- $k = k_J$ なら $\omega = 0$ で、与えた摂動は時間発展しない（中立安定）
- $k < k_J$ なら ω は純虚数。この時は解は減衰する解と発散する解の両方がある（不安定）。

なお、一応念のために書いておくと、式 (5.27) の形の解だけを考えるのは任意の初期条件からの解が（連続性とかを仮定すれば）この形の解の線形結合で表現できるからである。解の線形結合が解であるのは方程式が線形だからであり、任意の解が表現できるのは要するにフーリエ変換が完全系をなすからである。

話を戻すと、定性的に見たときにわかったように、波長が短ければ普通の音波として振舞うが、波長が $1/k_J$ より長いと時間の指数関数で進化することになる。つまり、密度が上がり始めたらどんどんあがる（下がり始めたらどんどんさがる）ということになる。

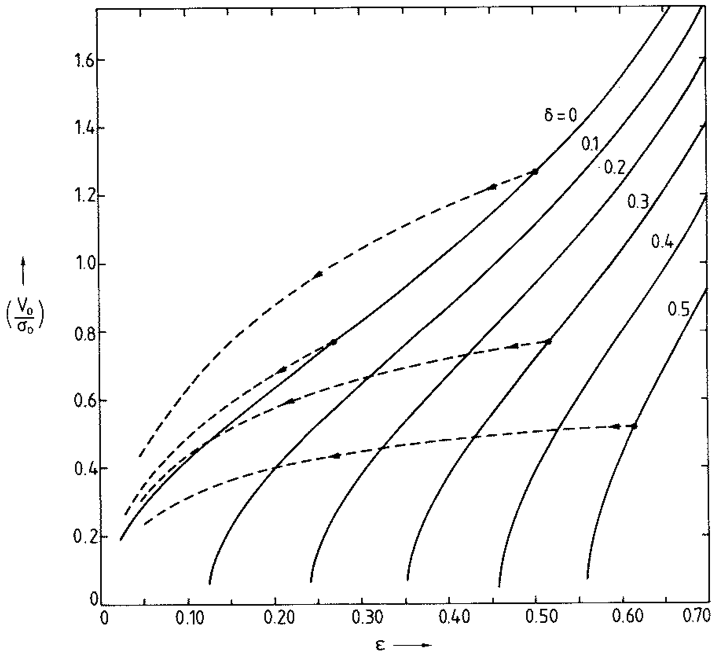


Figure 4-5. The relationship between the rotation parameter v/σ and ellipticity ϵ predicted by (4-95) for elliptical galaxies whose isodensity surfaces are similar coaxial oblate spheroids. The dashed curves show the movement of the point corresponding to the observable quantities $\tilde{v}/\tilde{\sigma}$ and $\tilde{\epsilon}_a$ when the galaxy's inclination angle i is decreased from $i = 90°$.

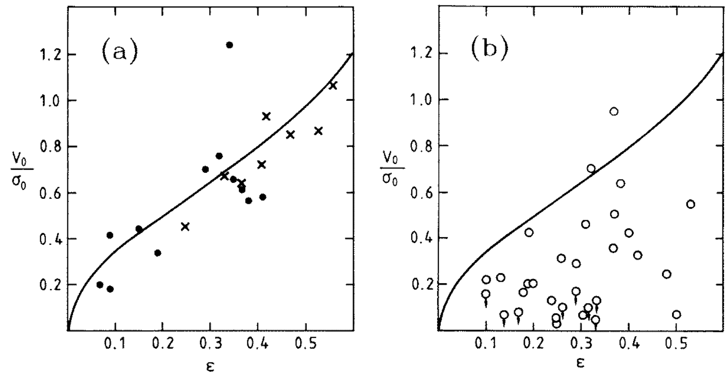


Figure 4-6. (a) The positions in the $(v/\sigma, \epsilon)$ plane of elliptical galaxies (dots), and of spheroids (crosses), that have luminosities smaller than $L = 2.5 \times 10^{10}\,\mathrm{L}_\odot$. (b) The same as (a) but for elliptical galaxies brighter than $L = 2.5 \times 10^{10}\,\mathrm{L}_\odot$. (After Davies et al. 1983.)

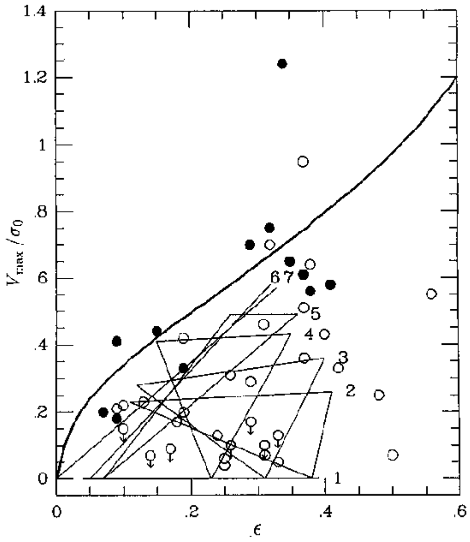


Fig. 6. Ratio of the maximum rotation velocity to the central velocity dispersion ($V_{\rm max}/\sigma_0$) plotted against the ellipticity (ϵ). Three vertices of triangles indicate the numerical results observed from the a-, b-, and c-axes. The open circles indicate observational luminous ellipticals ($M_B < -20.5$); the filled circles indicate less luminous ellipticals ($M_B > -20.5$). The data were taken from Davies et al. (1983).

第6章　恒星系でのジーンズ不安定とランダウ減衰

前章では、空間的に一様で等方な仮想的な系の不安定性について、まず流体の場合を扱った。今日はいよいよ（と気張るほどのこともないが）恒星系の場合を考える。

6.1　CBEの線形化

何度も出てきたがもう一回式を書いておく。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f - \nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{6.1}$$

ここで f は6次元位相空間での分布関数である。Φ は重力ポテンシャルであり、以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho. \tag{6.2}$$

G は重力定数であり、ρ は空間での質量密度

$$\rho = m\int d\mathbf{v} f, \tag{6.3}$$

である。これを流体の時と同様に線形化して、その振舞いを調べる。分布関数を $f_0 + f_1$、ポテンシャルを$\Phi_0 + \Phi_1$とし、添字0がつくほうは定常解であるとして式を整理すれば

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_1 - \nabla\Phi_0\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} - \nabla\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{6.4}$$

$$\nabla^2\Phi_1 = -4\pi G\int f_1 d\mathbf{v}. \tag{6.5}$$

ということになる。これが線形化された無衝突ボルツマン方程式である。

6.2　Jeans 不安定

上の線形化されたボルツマン方程式は、平衡解の回りならば何でも使えるが、ここではもっとも簡単に解析できる場合として空間分布が一様な場合を考える。これから f_0は速度だけの関数であり、Φ_0 は定数としていいことになるので

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_1 - \nabla\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{6.6}$$

と少し式が簡単になる。まず、流体の場合と同じような平面波型の解を考えてみよう。

$$f_1 = f_a(\mathbf{v})\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)] \tag{6.7}$$

$$\Phi_1 = \Phi_a\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)] \tag{6.8}$$

速度空間の方にも伝わっていく波とかいうのも考えられないわけではないが、とりあえずそういうのは考えない。これらを上の線形化した式に入れれば

$$(-\omega+\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})f_a(\mathbf{v})-\Phi_a\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{v}}=0 \tag{6.9}$$

$$-k^2\Phi_a = 4\pi G\int f_a d\mathbf{v} \tag{6.10}$$

となる。これらから f_a を消せば、 Φ_a も落ちて

$$1+\frac{4\pi G}{k^2}\int\frac{\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{v}}}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega}d\mathbf{v}=0 \tag{6.11}$$

となって、f_0が与えられていれば k と ω の関係、すなわち分散関係を与える。

もっとも、これはちょっと困った式で、 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega=0$ が特異点になっている。したがって、実数の振動数を考えるのはすこし厄介な話になる。まず、臨界点、すなわち振動数が 0 の場合と、不安定、すなわち振動数が純虚数の場合を考えよう。

6.3 臨界点

式が繁雑なので、いま、波数ベクトルを x 軸方向にとることにすると、分散関係は

$$1+\frac{4\pi G}{k^2}\int\frac{k\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{kv_x-\omega}d\mathbf{v}=0 \tag{6.12}$$

臨界安定で $\omega=0$ とすれば、結局

$$k_J^2=-4\pi G\int\frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{v_x}d\mathbf{v} \tag{6.13}$$

となる。 f_0が $v_x=0$ で有限で微分可能なら積分は求まるので、これから $\omega=0$ となる波数 k_Jは決まる。

流体の場合と対応をつけるために、速度分布 f_0をマックスウェル分布

$$f_0(\mathbf{v})=\frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{6.14}$$

にしてみる。これは例によって

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv=\sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{6.15}$$

を使って全部積分できて、

$$k_J^2=\frac{4\pi G\rho_0}{\sigma^2} \tag{6.16}$$

となる。これは、流体の場合と同じになっている。つまり、中立安定な波長 (ジーンズ波長) は、恒星系と流体で同じである。

6.4 不安定な場合

次に、振動数が純虚数の場合を考えてみる。この時は、$\omega = i\gamma$ として元の式にマックスウェル分布を入れて整理すると

$$1 + \frac{2\sqrt{2}\pi G\rho_0}{k\sigma^3}\int \frac{v_x e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{kv_x - i\gamma}dv_x = 0 \tag{6.17}$$

ここで、被積分関数の分母を実数にするために

$$\frac{v_x(kv_x + i\gamma)e^{-v_x^2/2\sigma^2}}{k^2v_x^2 + \gamma^2}dv_x = 0 \tag{6.18}$$

と書き直すと、虚部は奇関数なので落ちる。実部は

$$\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{x^2 + \beta^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\pi\beta e^{\beta^2}[1 - \mathrm{erf}(\beta)] \tag{6.19}$$

なる関係を使って

$$k^2 = k_J^2\left\{1 - \frac{\sqrt{\pi}\gamma}{\sqrt{2}k\sigma}\exp\left(\frac{\gamma^2}{2k^2\sigma^2}\right)\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}k\sigma}\right)\right]\right\} \tag{6.20}$$

なんだかよくわからないが、まあ、k と ω (γ) の関係を与えてはいる。$k < k_J$なら、ある実数 γ（正負どちらでも）があって上を満たす。ただし、$k = k_J$ の場合と $k = 0$ の極限を除いては、値は流体の場合とは一致しない。

というわけで、波長がジーンズ波長よりも長いモードは流体と同様不安定で、勝手に成長することになる。

6.5 van Kampen mode

さて、それでは、音波に当たるような振動数が純実数のモードというものはあるのだろうか ?これについては、BT を含めて標準的な教科書でも若干混乱した記述がなされていることがある。以下、van Kampen の論文 (1955, Physica, 21, 949) に沿った理解を試みることにする。分散関係の一つ前の式に戻ってみると、

$$(-\omega + \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})f_a(\mathbf{v}) + \frac{4\pi G}{k^2}\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{v}}\int f_a d\mathbf{v} = 0 \tag{6.21}$$

となっている。面倒なのでまた y, z 方向についてはあらかじめ積分すると、

$$(-\omega + kv_x)g(v_x) = -\frac{8\pi^2 Gv_x}{k}f_0(v_x)\int g dv_x = 0 \tag{6.22}$$

ただし、g は f_aを y, z 方向に積分したものである。また、f_0は等方的であるとし、さらに

$$\int\int v^{-1}\frac{df_0}{dv}dv_y dv_z = -2\pi f_0(v_x) \tag{6.23}$$

なる関係を使った。これは、v_x一定の平面上で極座標に変換すればすぐに出てくる。上の式は g についての線形斉次な方程式で、

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G}{k}\frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - kv_x} \tag{6.24}$$

という解を持つ。ここでは、$\int g dv_x = 1$ となるように規格化した。ただし、意味のある解であるためには

$$-\frac{8\pi^2 G}{k}\int \frac{v_x f_0(v_x)}{\omega - k v_x} dv_x = 1 \tag{6.25}$$

を満たすようになっている必要がある。これは、最初に出した分散関係と実は同じ式である。

最初にもいったように、この式がよろしくないのは $v = \omega/k$ で積分が特異になるからである。意味のある解を求める一つの考え方は、g を超関数に拡張してしまうことである：

$$g(v_x) = -\frac{8\pi^2 G v_x f_0(v_x)}{k}\left[\mathcal{P}\frac{1}{\omega - k v_x} + \lambda\delta(\omega - k v_x)\right] \tag{6.26}$$

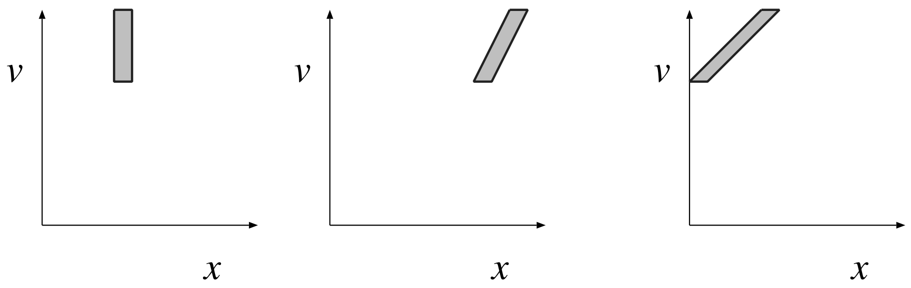
ここで $\mathcal{P}$ は主値をとるということで、要するに積分の不定性をδ関数のほうに押しつけてみたというだけである。実際に、規格化を満たすという条件から λの値を決めることができる。この「モード」は、任意の ωと $k > k_J$なる k のすべての組合せに対して存在する。これを van Kampen mode という。

これがいったいどういうものかを少し考えてみよう。まず、δ関数の分は、$v_x = \omega/k$ のところにだけ値があるということを示している。つまり、位相速度が摂動を受けていないもともとの速度と等しい、いいかえれば与えたものがそのままラグランジュ的に動いていくようなものである。これは、いま重力がまったくない極限を考えれば、単に摂動がまわりと相互作用することなくそのまま動いていくというものであると考えられる。これにたいして、もう一つの項は重力による応答を示していると考えていい。

このへんはちょっとお話しになって申し訳ない（詳細を知りたいひとは van Kampen の原論文に当たってほしい）が、van Kampen モードは完備であることがわかっている。つまり、任意の摂動を van Kampen mode の組合せとして表現できる。

6.6 Phase Mixing

さて、任意の摂動が、減衰しないモードの組合せとして表現できるのなら、それはなにか音波のような伝わっていく波になっているのであろうか？実はそんなことはない。これは、以下の簡単な例で示すことができる。1 次元で、重力がない系である有界な領域に摂動 (overdensity) を与えたとする。で、簡単のために周期境界で、右から出ていったものが左から入ってくるとしよう。もちろん、ちゃんと適当なポテンシャルを考えるとか、無限一様な場合を考えるとかしても本質は同じである。（無限一様な場合は、単に周期的な摂動を与えたというのに対応する）



すると、時間がたつに従って摂動が引き延ばされていくということがわかる。このために、例えば密度の変化といった量は時間がたつにしたがって減衰していく。

つまり、 singular な van Kampen mode 自体は減衰しないが、それを重ね合わせた有限の広がりを持つ摂動は減衰するように見える。これが通常 phase mixing と呼ばれるものである。

6.7 Landau Damping

さて、モードがあって、世の中はその重ね合わせであるというのなら、それで話はおしまいではないかとおもうのが人情だが、普通はそういう話にはなっていない。というのは、 Landau Damping という難しいものがあるということになっているからである。これはどういう原理ででてくるかというと、要するに複素数の ω があると信じて、そういう解を求めると、ちゃんとそういうものが見つかるというものである。つまり、摂動の速度方向の分布 f_aをうまくとってやると指数関数的に減衰するモードがでてくる。ただし、注意して欲しいのは、これは、 f_aに制限をつけないと出てこないということである。不連続な f_aを仮定すれば、時間のベキでしか減衰しないような解を構成することも出来る。ただし、そういった解はモードの形、つまり位置、時刻の指数関数の形に単純に書けるとは限らない。

逆にいえば、解が指数関数の形に書けると仮定すれば、ジーンズ波長より短ければそれは指数関数的に減衰するわけである。

今、簡単のために重力がない一次元系を考える。この時 van Kampen mode は単なる δ関数なので、初期の波数が k であるような摂動は

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[i(kx - vt)] \tag{6.27}$$

という形をしているということにしよう。これは、自明な解になっているということは式を良く見ればわかる。

しかし、注意して欲しいのは、これは最初に安定性解析の時に仮定した $f_a(v)\exp[i(kx-\omega t)]$ という形とは違うということである。これは、振動数 ω が v そのものであり、速度空間のなかでの位置に依存するためである。

このことをいいかえると、上のような 「自然な」解があるにもかかわらず、モード解析をすると van Kampen mode のような singular なものが出てくるのは、モード解析の仮定として位相速度が粒子の速度に寄らないようなものを考えたからであるともいえる。

さて、上の 「自然な」解はどのように振舞うかをちょっと見てみよう。密度は、

$$\rho_1(x,t) = e^{ikx}\int g(v)e^{ivt}dv \tag{6.28}$$

これから、例えば $g(v)$ が

$$g(v) = \begin{cases} 1/2v_0 & |v| < v_0 \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{6.29}$$

みたいなものだと、 $1/t$ で減衰するという解がでてくる。

このような減衰が起きるのは、初期条件が非常に特別なものであるためであるということに注意してほしい。つまり、速度ごとに波の位相速度が違うのに、初期条件としてその空間位相がすべてそろったものを考えたわけである。そうすると、時間がたてば位相はずれていくので速度方向に積分して見た波の振幅は小さくなってくことになる。これは、速度方向の 「波数」に時間が生で入ってくるためである。

なお、 $g(v)$ に適当な形を仮定すれば、もっと速く減衰するものも作れる。

もちろん、無衝突ボルツマン方程式にしたがった進化は可逆過程である (エントロピーを生成しない) ので、原理的には逆に振幅が大きくなるような初期条件も存在していないといけない。実際、減衰していく解で、どこかで時間反転すればそういう解が作れるわけである。

なお、今日の話で要領を得ないと思った人は、リフシッツの『物理的運動学』あたりを見てみるのがよいと思う。

第7章　粗視化エントロピー、violent relaxation

7.1　粗視化エントロピー

先週扱った、ジーンズ波長より短い摂動の（線形での）減衰は、無衝突系に固有の現象であり、流体ではこれに対応するものはない。ここでは、まず、その物理的意味についてもう一度考え直して置こう。

$$f_1(x,v,t) = g(v)\exp[ik(x-vt)] \tag{7.1}$$

初期の摂動の位相が v によらないとすれば、その時間発展は上式で与えられる。したがって、密度はこれを v で積分したものであり、式をじっとみればわかるように $g(v)$ のフーリエ変換になっている。したがって、$g(v)$ を選べばいろんな時間依存を持つものが作れることになる。

さて、すでに何度もいったことだが、無衝突系ではエントロピー生成はない。これは、分布関数 f が軌道にそって保存するからであった。しかし、上の式からわかるように、速度方向の構造は、時間がたつにしたがってどんどん細かくなっていってしまう。これに対して、実際の系では粒子数が有限であり、分布関数に無限に細かい構造をつくることが出来るわけではない。また、観測するとか、数値計算するとかいうことを考えると、どこかで分解能よりも構造が細かくなってしまうことになる。

つまり、通常のエントロピーは

$$S = \int f \ln f dx dv \tag{7.2}$$

であるわけだが、これを適当な分解能で荒く見たものを考えてみよう。それにはいろいろな考え方があるが、ここでは適当なフィルタ $g(x,v;h)$ というものを考え、

$$\int g(x,v;h)dxdv = 1 \tag{7.3}$$

$$\lim_{h\to 0}\int fg(x_0-x, v_0-v;h)dxdv = f(x_0,v_0) \tag{7.4}$$

というようなもの、つまり、適当な極限で δ関数になるようなものを考える。

で、粗視化された分布関数 $\hat{f}_h$というものを

$$\hat{f}_h = \int fg(x-x_1, v-v_1;h)dx_1dv_1 \tag{7.5}$$

と定義する。

ちゃんと計算して見せた方がもちろんいいんだけど、結局どういうことがいえるかっていうと、粗視化されたエントロピー

$$\hat{S} = \int \hat{f}\ln\hat{f}dxdv \tag{7.6}$$

というものを考えると、これは増えるということである。

というわけで、どういう風に増えるかってのは計算練習。

さて、ここで重要なのは、この「粗視化されたエントロピーは増える」という性質は、平衡からのずれが線形でも非線形でも変わらないということである。言い換えれば、仮にいま平衡状態から遠くはなれたものをなにか考えたとして、その時間進化を適当に粗視化したエントロピーで見たとしよう。そうすると、$\hat{S}$は時間がとともに増えて、そのうちにある定常値に達する。しかし、これは、あくまでも速度空間での分布関数の構造が粗視化のために分解できなくなったというだけで、系が物理的に平衡状態に向かって進化しているわけではないことに注意しなければならない。

7.2 非線形 Landau Damping

ちょっとここで話を変えて、非線形 Landau Damping というものを考えてみる。これはつまり、摂動の作る重力が無視出来ないような時にその摂動がどう振舞うかということである。

この解析は実は結構難しい。というのは、もともと線形 Landau damping というか phase mixing というものはあるので、非線形性が効くかどうかに無関係に摂動はどんどん減衰していくからである。しかし、とりあえず、非線形な効果を考えるとどんなことが起きるかをちょっと整理してみる。

今、とにかくポテンシャルの波というのがあって、速度 v_w で動いているとする。これに対して速度 v_p で動いている粒子があるとしよう。この粒子と波の相互作用というものを考えてみる。

今、 $v_p \sim v_w$ 、つまり大体同じ速さで動いていることにすると、粒子はその波に対する相対的位置によって受ける力の方向が変わる。波に対して遅れていれば引っ張られるし、そうでなければ減速される。このため、初期にどういう位相にいたかによって、大きくエネルギーをもらったり失ったりするものがあることになる。

ただし、波が無限に長い間維持されていれば、無制限にエネルギーをやりとり出来るわけではない。これは、座標変換して波が止まっている座標でみれば当然のことで、あるポテンシャルの谷のなかに止まっているか、それとも超えて動いていくかのどちらかであって平均すればエネルギーのやりとりは起きないことになる。

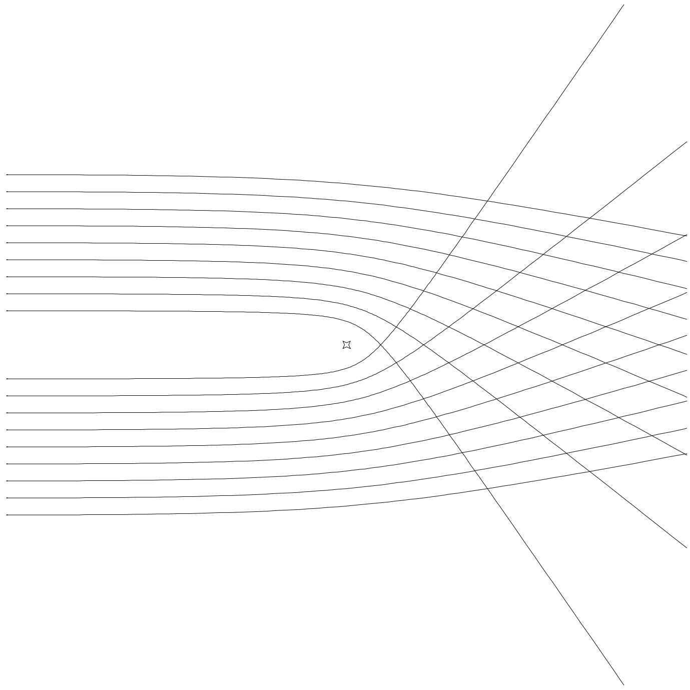
7.3 Dynamical Friction

さて、ここで少し違った状況を考えてみる。今、温度 0 (だと、本当はジーンズ不安定が起きるわけだがこれはとりあえず考えない、すなわち自己重力は無視する)の、無限に一様な物質分布の中を、適当な大きさを持った球対称なポテンシャルの摂動 (質点によるものでも OK)が動いているとしよう。

座標系はこの質点の運動の方向を対称軸にとった円筒座標で考えていい。この時、バックグラウンドの物質がどう動くかを考えると、質点の方に固定した座標系では図のようになる。つまり、平行に入ってきたものが散乱されるだけである。

ここで、しかし、もともとの止まっていた物質分布に固定された座標系で考えると、散乱されたものは、左向きと中心向きの速度をもらうことになり、ネットに加速されている。つまり、エネルギーをもらっているのである。

回りがネットにエネルギーをもらっているので、動いている質点のほうは減速されなければならない。これが dynamical friction と呼ばれるものである。この効果は、別に動いているものが単純な



質点のポテンシャルとかでなくても、3 次元空間のなかで有界なものが動いていれば常に働くということに注意してほしい。

すなわち、一方向に進む平面波というようなものを考えるとネットにエネルギーのやりとりは出来ないことになるが、孤立波とか非周期的な摂動とかを考えるとちゃんとそれが非線形なダンピングを受けることになる。

もうちょっと別な例としては、サイクロトロン加速をあげることができる。この場合、加速される粒子はエネルギーをもらっても周期が変わらないため、電場を周期的に掛けることで（非相対論的な範囲で）加速を続けることができる。

このように、摂動と回りの相互作用を考えれば、実際にエネルギー交換がおきてそれが摂動のエネルギーを回りに伝えるということ自体は起こり得る。

ただし、この場合でも、やはりエントロピー生成はないということは依然として注意が必要である。Dynamical Friction の例では、質点の運動エネルギー（これはエントロピーを持たない）が回りの粒子の運動に変換されたわけだが、回りの粒子の運動は依然としてシステマティックなものでありランダム成分を持たないので、エントロピーは生成されていないのである。

7.4 Violent relaxation

7.4.1 理論

ここまで述べてきたことは、

- 線形 Landau damping (phase mixing) では、粗視化エントロピーを増やすことができる。

- 非線形 Landau damping (phase mixing) では、線形の phase mixing 以外の要因で粗視化エントロピーが増えるわけではない。

とまとめることができる。

線形 Landau damping では粒子のエネルギーが変わらないので、通常の意味で熱平衡に近付いているのではないということはあきらかであろう。しかし、非線形の場合はどうだろう ?エントロピーが生成されていないからといって、なんらかの意味で熱平衡に近付いていないと断言できるだろうか ?

このような問題意識には、観測的な理由もないわけではない。それは、楕円銀河というものの存在である。

楕円銀河というのは、結構たくさんあるわけだが、これはどれも似たような形をしている。これはたんに形が似ているというだけではなく、実は、半径方向の密度 (表面輝度) 分布に比較的に共通性が高いということがわかっている。具体的には、いわゆる $r^{1/4}$則、あるいは Hernquist Profile で良く近似できているわけである。

楕円銀河がどういうふうにして出来たかは良くわかっていないが、初期条件がどれもこれも非常に良く似ていたというのはあまりありそうにない。それにも関わらず、みんなが良く似た形をしているというのは、なんらかの熱平衡にむかうような緩和過程の存在を示唆しているのかもしれない。

というようなことを考えて、 Lynden-Bell (1967) は violent relaxation というものを提案した。彼の論理は、大雑把にいうと以下のようなものである

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 粒子のエネルギーの変わり方は初期の位置 (位相空間内での) によって決まるので、エントロピーが変わるとか、ランダム化されるとかいうことはないが、粗視化してみれば粒子のエネルギーの変わり方はランダムとみなせるはずである。
- 従って、このランダムな変化に対する熱平衡が存在するはずである。これを Lynden-Bell 統計と名付ける。
- 力学平衡に向かう間は、単に phase mixing だけが起こっているわけではなくこの Lynden-Bell 統計に向かう進化も同時に起きているはずである。

なお、 Lynden-Bell 統計であって普通の Maxwell-Boltzman 統計には従わない理由は、 f の値に制約がある (初期の分布の最大値を超えられない) からであるそうである。

Lynden-Bell は大変偉い先生であるので、この提案は大きな影響力を持った (現在も持っている)。

7.4.2 帰結

上の、 violent relaxation が本当に有効に働くとすると、どんなことがおきることになるかをちょっと考えてみる。これによって起きる緩和は、いくつかの点で通常の熱平衡に向かうものと異なっている。

- 系がまだ力学平衡に落ちついていないあいだ、密度分布、したがってポテンシャルは複雑な時間変化をする。これは、それぞれの粒子エネルギーを変える。
- 等分配が働かない。これは、 (単位質量当たりの) エネルギー変化が位置だけで決まるからである。

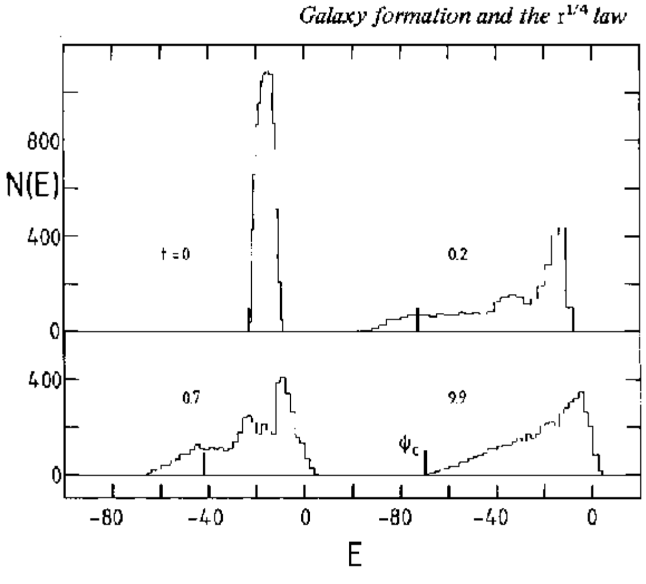
- 通常の意味で平衡に近付くかどうかは本当はわからない。普通の緩和過程では、エネルギーの高い粒子はそれを失う傾向があるし、低いものはもらう傾向があるが、そういう傾向は特にないためである。
- 緩和がどの程度進むかはわからない。力学平衡に落ちつけばエネルギー変化は止まってしまうからである。

7.4.3 数値実験とその解釈

Violent relaxation というのは、いろいろな意味で魅力的な提案であったので、数値実験によって実際にそんなにうまくいくかどうか調べようという試みが多数なされている。ここでは、その代表的なものである van Albada (1982, MNRAS 201, 939) を取り上げて、どんな結果になったかをまとめる。

計算は極座標でポアソン方程式を球面調和関数展開してポテンシャルを求める計算法によっている。このために、1982 年というかなり昔でありながら、5000 粒子というこの目的には十分な数の粒子 (粒子の数の意味については来週扱う) を使うことができた。

初期条件は、粒子に少しだけランダム速度を与えて、大体球状 (実際には、いろいろ変化させているが) に分布させ、手を離してどうなるか見るというものである。



この図は、あるケースについて $N(E)$ をプロットしたものである。$N(E)$ は分布関数ではなく、$N(E)dE = dN$ を満たすような、つまりはあるエネルギー範囲にある粒子の数である。これを使うのは、数値計算で実際に分布関数 f を求めるのはいろいろ困難があるのにたいし、理論計算では f から N を出すのは機械的だからである。

初期には狭いところに集まっているが、落ちついたあとでは広がっている。これは、ある程度まで violent relaxation というものが起こっているということを示してはいる。

これは、初期のエネルギーと落ちついた後のエネルギーの関係を示している。明らかにわかることは、非常に強い相関が残っているということである。つまり、もともとエネルギーが低かったもの

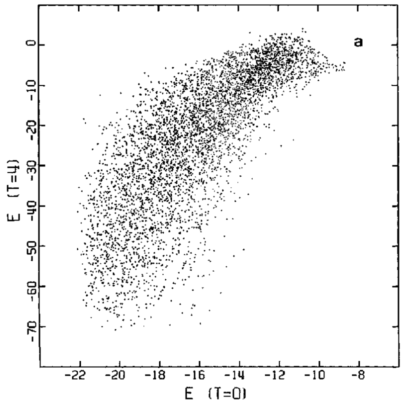


Figure 3. Relation between values of the binding energy before ($t = 0$) and after the collapse ($t = 4$ and 8). Note difference in scale of factor 5. This figure shows that all information concerning the initial state is not wiped out during the violent relaxation phase.

は相対的に低いまま、高いものは高いままに留まる傾向がある。

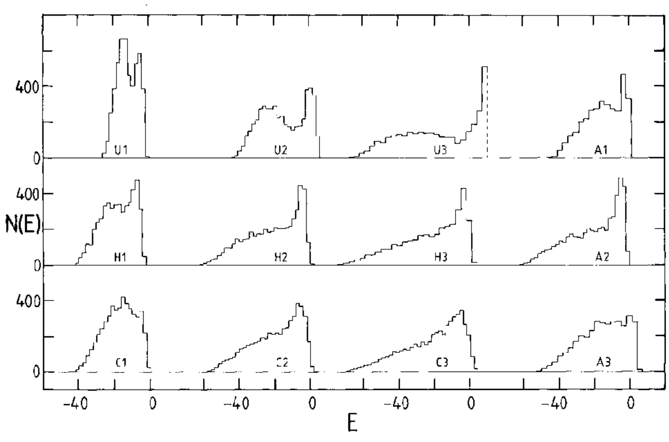


Figure 7. Histogram of binding energies for the final equilibrium models.

これはさまざまな初期条件からの結果をすべてまとめたものである。($N(E)$ をプロット）初期条件によって、 $N(E)$ はいろいろであり、とてもある一つのものに向かうといえるようなものではないということが見てとれるであろう。

7.4.4　まとめ

結局のところ、 Lynden-Bell が主張したような violent relaxation は、全く働かないというわけではないが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけでもない。このために、無衝突系の最終状態は初期条件の記憶を強く残している。

例えば楕円銀河が合体で出来たという説に対する反論として、「合体したら violent relaxation によってよく混ざるはずであるから、 color gradient などの構造があるのはおかしい」という主張がなされたことがあったが、現在ではこれは合体説に対する反証とは考えられていない。

第8章 Violent relaxation (続き)、2体緩和

8.1 Violent relaxation (続き)

前回は、楕円銀河がどれも良く似たような形をしているのは何故かということを説明するひとつのモデルとして、Lynden-Bell が提唱した violent relaxation の考え方を紹介し、それが適当なものであるかどうかを検討した。

Violent relaxation の主張というのは、要するにシステムが力学平衡から遠く離れていれば、全体として振動する。その振動が系の各粒子のエネルギーを位相に依存する複雑な方法で変化させるので、これはランダムな変化と同様になり、系をある平衡状態に導くというものであった。しかし、数値実験の結果はそうなっていないし、それは基本的には上のメカニズムが十分に熱平衡に近い状態を実現できるほど有効に働くわけではないということで理解できる。

それならば、楕円銀河がそれなりによく似ているということには、さらにまた別の説明が必要であるということになろう。ここでは、2つの考え方を紹介する。

8.1.1 N(E) の連続性

Violent relaxation で「平衡状態」にいくというわけではないにしても、楕円銀河が円盤銀河とはちがった何らかの力学的な進化、すなわち Lynden-Bell が想定したような系全体の振動のようなものを経験したと考えるのはそれほど不自然ではないであろう。

では、そのような系全体の振動というものを考えた時に、分布関数についてなにかいえることはないだろうか?実は、問題が3次元であるということから、分布関数が特徴的な性質をもつであろうということが直接にいえる。80年代以降、このことは「何となく」理解されていたようであるが、ある程度明確に述べたのは、IAU Symposium 127 “Structure and Synamics of Elliptical Galaxies” での Scott Tremaine (Conference Summary) と W. Jaffe (Poster) の発表であったようである。Tremaine の記録に残っている集録原稿は要領を得ないものであるので、以下 Jaffe にしたがって簡単にまとめる。

何らかの原因、例えば他の銀河と合体するとか、合体しないまでも近くを通り過ぎるとかで大きな振動が励起されたとする。すると、それが構成する各粒子のエネルギーを変化させることになる。

エネルギーが変化した粒子のなかには、もちろん、エネルギーが正、すなわち系に束縛されなくなってそのまま無限遠にいってしまうものもある。また、そうでなくても、エネルギーがある程度0に近ければ、一旦遠くにいって、また戻ってくる頃には系はほとんど落ちついているので、それ以上エネルギーが変化するということはない。

このような、エネルギーが0に近い粒子の分布というものを考えてみる。なんらかの熱平衡のようなものを考えると、このあたりに粒子がたくさんないといけないことになる。というのは、エネルギーが高いほど空間的な体積が大きいので、熱平衡になるためにはその体積にくまなく粒子を分布

させる必要があるからである。熱平衡とすれば、結局エネルギーが高くなるほど粒子が多いことになって質量が発散してしまうのは前に述べた通りである。

しかし、実際にこのようなエネルギーが0に近い粒子が形成されるプロセスを考えてみると、このような熱平衡にいくとか質量が発散するとかいうことは起こらない。これは、このプロセスが、エネルギー0の平衡状態に相当する遠く離れたところで起きるのではなく、系の中心付近でしか起こらないからであり、また、このプロセスがすぐに止まってしまうからでもある。

結果として、エネルギーが0に近い粒子というものは確かに作られるが、その分布は熱平衡を満たすようにはならない。ではどうなると考えられるであろうか?実際にそういった粒子が出来るところを考えてみると、例えばエネルギーが正になってしまうかどうかを知っているわけではないし、どれくらいの phase volume があるかどうかということを知っているわけでもない。従って、エネルギーが0に近い粒子の分布は、$N(E)$ が特異でない(発散したり0にいったりしなくて、おそらく微分可能である)ということによって特徴付けられると考えていいと思われる。

実際、前回例に出した van Albada の数値実験では多くの場合にそうなっていたわけである。

これは、$N(E)$ が、$E=0$ の付近、すなわち、大雑把にいって $r\to\infty$ の極限で、$N(E)=N_0+N_0'E\cdots$ の形の展開を持ち、特に $N_0>0$ であるということを意味する。

8.1.2 N(E) から分布を?

さて、$N(E)$ について何かわかったとして、それから直ちに分布関数 f なり密度 ρ についてなにかいえるわけではない。仮に球対称を仮定したとしても、角運動量分布の自由度があるからである。以前にジーンズ方程式について議論した際に、系の中心にカスプがあるというような観測から分布関数やポテンシャルについてなにかをいうことは必ずしも可能ではないということがわかった。今回も同じような困難があるのではないだろうか?

とりあえず、困難はおいておいていろいろやってみることにしよう。定義により「十分外側」を考えるので、ポテンシャルは

$$\Phi=-M/r \tag{8.1}$$

で与えられるとする。単純な例として、すべての粒子が円軌道を回る、すなわち最大の角運動量を持つ場合を考える。もちろんこんなことは現実にはあり得ないが、とりあえず計算は簡単なのでいいことにしよう。円軌道の式からすぐにわかるように、

$$E=-\frac{M}{2r} \tag{8.2}$$

である。つまり、エネルギーが決まれば中心からの距離が決まる。したがって、密度を求めるにはヤコビアンを計算すればいい。つまり

$$dM=|4\pi r^2\rho dr|=|N(E)dE| \tag{8.3}$$

と、式8.2からでる

$$\frac{dE}{dr}=\frac{M}{2r^2} \tag{8.4}$$

から、

$$\rho=\frac{MN(E)}{8\pi r^4} \tag{8.5}$$

を得る。

円軌道は特殊なので、もうちょっと違うことを考えれば違う答がでるのではないかと心配になるが、たとえば Jaffe (1987) は、等方的な場合にもやはり $\rho \propto r^{-4}$ を示している。もちろん、これもあまり信用できるわけではない、というのは、実際の粒子の分布は、角運動量に強く依存するものになっていると考えられるからである。

それなら、逆の極限、すなわち、すべての粒子が角運動量を全く持たない場合はどうであろう？実は、この場合にも円軌道と同じ結果になることがわかる。これは、実際に軌道が解けるので、エネルギーごとにある位置への滞在確率を求めて積分すれば密度が求まるが、その式から結局滞在確率が外にでてしまうからである。

もうちょっと厳密に示そう。あるエネルギー E の粒子が、中心からの距離がある範囲 $(r, r+dr)$ にいる確率が $P(E,r)dr$ で書けるとすれば、密度は

$$4\pi r^2\rho = \int_{E_r}^{0} P(E,r)N(E)dE \tag{8.6}$$

で与えられる。ここで E_r は距離 r に到達できるエネルギーの最小値であり、$-M/r$ で与えられる。いま、ケプラーポテンシャルのなかでの直線軌道を考えているので、 $P(E,r)$ は書き下すことができ、特に

$$P(E,r) = P_0(r/r_E)/r_E \tag{8.7}$$

の形に表現できる。ここで $r_E = -M/E$ である。さらに $x = rE/M$ という変数変換を行なって適当に整理すると、

$$\rho = \frac{M}{4\pi r^4}\int_{-1}^{0} -P_0(x)xN(Mx/r)dx \tag{8.8}$$

これから、 $r \to \infty$ の極限で、積分の中が収束することがわかる。従って、すべてが radial orbit の場合も円軌道の場合もおなじことになる。

それでも一般に J に分布があったら違うのではと心配になる向きは、実際に計算してみよう。つまり、 $N(E,J)$ の形で実際に分布を与え、J についての依存性にどのような制約があれば上と同様の結果が得られるか調べてみよう。ここでは結論だけを述べておくと、かなりゆるい条件のもとで OK であることがわかっている。

8.1.3 N(E) についてのまとめ

結局、比較的一般的な条件として、自己重力系で力学平衡から大きくずれた振動などを経験した場合には、 $N(E)$ が $E \sim 0$ で連続という条件から、 $\rho \sim r^{-4}$ という結論が出せる。これは、前にモデルのところででてきた Hernquist model や Jaffe model に共通な性質であり、これらは、（中心部の構造が全く違うにも関わらず）どちらも楕円銀河に良く合うとされている。「観測的に楕円銀河の性質が共通である」というのはその程度の意味であると考えるべきかもしれない。つまり、基本的には外側のほうで$\rho \sim r^{-4}$に漸近していくような構造というのが本質ではないかと考えられる。

8.1.4 中心部の構造

さて、それでは、中心部の構造についてはなにもいえないのであろうか？これは実はまだ良くわかっていない問題である。最近、 Navarro たち（astro-ph/9611107, 最近 ApJ にも出たはず）は、数値計算の結果をもとに以下のような主張をしている

- CDM シナリオによる構造形成を考えた時、CDM が作る自己重力系 (ガスとか星を考えない) は
$$\rho \propto \frac{1}{r_*(1+r_*^2)} \tag{8.9}$$
の形に書ける
- この形はユニバーサルで、例えば一つの銀河でも銀河団でも同じである

彼らはなぜそのようなことが起きるかについての解釈とか説明は特に与えていないが、例えば Syer and White (astro-ph/9611065) といった人達が説明を考えてはいる。

しかし、実は、Navarro たちの結果の解釈にもここのところ異論がでており、CDM と初期条件を制限しても、例えば Fukushige and Makino (1997ApJ 477 L9) とか Moore et al. (astro-ph/9709051) を見ると、上の「ユニバーサル」な形になったのは数値誤差のせいとかいう主張もなされていて良くわからない。が、これらの結果では Navarro たちのものより中心で等温に近くなっており、これらを信じるなら、中心 (というか、half mass radius より内側) の構造は、

- 第0近似としては singular isothermal である
- もうちょっとスロープが小さいらしいが、どれくらいか、また、どういうメカニズムかはまだよくわからない

という状況であるといえる。

8.2 2体緩和

8.2.1 前置き

さて、この講義も回数ではすでに半分以上が終り、当初予定していた

(1) 支配方程式 (無衝突ボルツマン方程式)
(2) 球対称の力学平衡モデル
(3) ジーンズ不安定と力学平衡への緩和過程
(4) 2体緩和
(5) 重力熱力学的不安定と重力熱力学的振動
(6) 自己重力多体系におけるカオス
(7) 外場の影響

のうちの最初の3つまでが済んだということになる。もっとも、それぞれ大きなテーマであり、力学平衡モデルについては軸対称、あるいは3軸不等なモデル、あるいはディスク系とその不安定モードなどについては全く扱うことができなかった。力学平衡への緩和過程についても、例えば合体の場合、あるいは理想化された1次元系を例にとって具体的な話をする必要もあったかもしれない。が、しかし、世の中は無衝突系だけではないし、また、現実は無衝突系である場合でも、それを数値的にモデル化したものはそうでなくなってしまうことがある。従って、衝突系の進化がどのようなものかということは、実際になんらかの自己重力系を扱う場合には必ず理解しておく必要がある。というわけで、これから数回で衝突系の進化というものを考えることにする。

8.2.2 2 体緩和とはなにか ?

まず、2 体緩和とはいったいどういうものかというところから話を始めることにする。原理的には、これがなにかというのは結構厄介な問題である。

有限粒子数の自己重力多体系を考えると、これは以下のような進化をすると考えられる。まず、最初は力学平衡になかったとすると、とりあえず力学平衡に落ちつく。粒子数が無限大であれば、無限に細かく見れば無限に時間がたっても真の力学平衡に到達するわけではないが、まあ、漸近はしていく。この時、各粒子は与えられたポテンシャルの中を運動するだけになり、それ以上進化することはなくなる。

さて、実際には有限粒子数であるので、そもそも真の力学平衡というものはない。有限の質量をもった各粒子が系の中を運動するに従って、ポテンシャルは必ず変化するからである。この変化によって各粒子の軌道も変化することになる。

それでは、粒子の軌道の変化を、粒子数が有限であることから来る成分とそれ以外に分離することは可能であろうか ?これは、系が力学平衡にあるとみなすことができればそれは可能である。つまり、力学平衡にあれば、粒子のエネルギー変化は定義によりすべて粒子数が有限であることによるからである。

が、良く考えると問題なのは、そもそも有限粒子数であるものを力学平衡とみなすとはどういうことかということである。このあたりを考えていると段々混乱してくるので、まず、理想化された状況から考えていくことにしよう。

8.2.3 理想化 :一様等方な分布

理想化といえば例によって一様等方な分布を仮定することである。例えばマックスウェル分布があって、その中の一つの粒子をとって考えるということをしたいわけだが、これは結構厄介なのでさらに簡単な例を考える。すなわち、速度 0 で空間内に一様 (ランダム) に分布した質点を考え、その中を質量 0 のテスト粒子を飛ばして見る。

もちろん、この場合エネルギー交換はないので速度は変わらず、単に散乱されるだけだが、しかし、この例は 2 体緩和のいくつかの重要な性質を示すのですこし詳しく見ていくことにする。分布している質点の質量を m、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離 (インパクトパラメータ) b を速度 v で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{2b}{(b/b_0)^2-1} \\ b_0 &= \frac{Gm}{v^2} \end{aligned} \tag{8.10}$$

で与えられる。単位時間当たり、インパクトパラメータが $(b, b+db)$ の範囲にある散乱の回数は $2\pi nvbdb$ である。

さて、散乱の方向はランダムであると思われるので、平均としては (一次の項は) 0 になる。しかし、 2 次の項は 0 にならない。これは

$$<\Delta\theta^2>= 2\pi nv\int_0^{b_{max}} \delta\theta^2 bdb \tag{8.11}$$

で与えられることになる。

この式から既にいろいろな性質がわかる。が、その前に理論的な困難を解決しておく必要があるであろう。すなわち、この積分は $b \to \infty$ で発散しているのである。これについてはいくつかの考え方があった。例えば、初めて2体緩和の性質を理論的に調べた Chandrasekhar は、以下のように考えた。

「平均粒子間距離よりもインパクトパラメータが大きいような散乱は、多体の干渉によって効かなくなるのでそこで積分を打ち切ってよい」

しかし、多体の干渉というようなものが実際にあるかどうかはあきらかではない。もっと素直な解釈は、実際に系にあるすべての粒子と常に同時に相互作用しているのだから、システムサイズくらいまで全部いれる（系が構造を持つ場合はちょっとややこしいが、密度の空間依存も積分のなかに入れて全空間で積分する）というものである。

数値実験の結果などから、後者の解釈すなわち全体が効くというほうが正しいということはかなり昔から大体わかっていた。歴史的には、どちらの解釈が正しいかについてはかなり最近まで論争があって、完全に決着がついたといえるのは94-5年頃である。が、これはまあそういうことをいっている人もいたっていうくらいのもので、定説となっているのは後者である。現在では後者の解釈が正しいということに疑いの余地はない。

上の式から、適当に近似すると

$$< \Delta\theta^2 > \sim Gnv^{-3}m^2 \log(R/r_0) \tag{8.12}$$

となる。ここで R は先に述べたシステムの大きさ、r_0 は「大きく曲がる」ためのインパクトパラメータの値で、$b_0 = GM/v^2$ の程度である。

さて、これからどんなことがわかるかというわけだが、これから、逆に角度変化が1の程度になる時間というのを求めてみると、

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \tag{8.13}$$

となる。ここで Λ は上の R/r_0 を単に書き換えただけである。

今、$\log \Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の3乗、数密度の逆数、質量の2乗の逆数に比例するということがわかったことになる。特に、質量密度一定の場合というものを考えてみると、タイムスケールが各粒子の質量に比例するということがわかる。

ある大きさを持った多体系というものを考えてみよう。質量 M、特徴的な半径（ビリアル半径か何か）R、粒子数 N とすれば、ビリアル定理から $v^2/2 = GM/R$、力学的なタイムスケールが $t_d \sim \sqrt{R^3/GM}$ となる。これを使うと上の緩和のタイムスケールは

$$t_\theta \sim \frac{N}{\log N} t_d \tag{8.14}$$

となる。粒子数が大きいほど無衝突系に近付くのだから、まあ、当然の結果といえなくもない。

2体緩和（続き）

8.3 2体緩和（続き）

前回は、2体緩和のイメージとして、テスト粒子が、静止したバックグラウンド粒子の分布の中を運動する場合を考えた。これで、テスト粒子が方向を変えるタイムスケールを導くことは出来たが、

これだけでは「緩和」とはいい難い。

今日は、実際にバックグラウンドの粒子も動いている場合について考えることにする。

8.3.1 どういうことを考えるかということ:流体との違い

2体緩和によって、最終的には系が熱力学的に進化するわけであるが、これが普通の流体（ガス）とは本質的に違うものであるということをここで再確認しておこう。

ガスの場合、粒子の平均自由行程はシステムサイズよりもはるかに小さい。液体であれば平均粒子間距離は粒子のサイズ程度であるし、気体であっても通常の状況では考えている現象の空間スケールに比べて平均自由行程は小さい。ちなみに、非常に希薄な気体とか、あるいは本当に空間スケールの小さい現象では平均自由行程が問題になる。これは例えば超高層での人工衛星の回りの気体の流れとか、あるいは最近の磁気ヘッドの回りの空気の流れとかいったものである。

とにかく、通常のガスの場合、平均自由行程がシステムサイズより小さく、システムサイズよりは小さく平均自由行程よりは大きいような空間スケールを考えると、そのなかでほぼ熱平衡になっていると思っていいことになる。いいかえれば、いわゆる Local thermal equilibrium (LTE) の仮定が使える。こうなると、温度とか圧力とかいった量が近似的（といっても実際上非常に高い近似精度で）に定義でき、そういったマクロな量で系の進化を扱う、特に熱の流れを拡散方程式で書くということが可能になる。

しかし、自己重力質点系では状況が全くことなる。まず、粒子数が無限大の極限では、平均自由行程も無限大であった。つまり、LTE がなりたたないどころか、そもそも熱平衡に向かう（すなわちエントロピーを生成する）ようなメカニズムがなかったわけである。

粒子数が有限の場合も、依然として平均自由行程が長い、つまり、粒子数無限大の時の軌道から、他の粒子との相互作用によって段々ずれていくわけだが、そのずれる典型的なタイムスケールは $Nt_d/\log N$ 程度であった。つまり、流体の場合とは全く逆に、ほとんど自由運動（というか、他の粒子全体が作るポテンシャルに沿った運動）をしていて、その場が有限の粒子で表現されるための揺らぎがあるので段々軌道が変わっていくということになるわけである。

従って、ローカルな熱平衡を仮定して拡散係数/輸送係数を求めるというのとは逆に、ある一つの粒子が系の中を動き回りながらどういうふうにエネルギー等を変化させていくかという観点で見ていくことになる。

これをすこし別ないい方をすれば、通常の空間のなかでの密度や温度の変化を考える代わりに、また 6 次元位相空間のなかでの分布関数の進化を考えるということに当たる。具体的には、これまで無視してきた「衝突項」というものをちゃんと評価して、どういうものかみてやろうということである。

8.3.2 バックグラウンドの分布のもとでの有限質量のテスト粒子の振舞い

さて、以下ではバックグラウンドの粒子分布のもとでの一つのテスト粒子の振舞いを考える。先週と違うのは、バックグラウンドも動いていることと、テスト粒子も有限の質量を持つことである。バックグラウンドの粒子は一様に分布するものとし、ある速度分布に従うとする。さらに、バックグラウンドの粒子間の相互作用とかは考えないことにする。これで本当にいいかどうかはちょっと良くわからない問題であるが、まあ、とりあえずやってみることにしよう。

前回と同じく、分布している質点の質量を m、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離 (インパクトパラメータ) p を相対速度 $\boldsymbol{V} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f$ で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{2p}{(p/p_0)^2 - 1} \\ p_0 &= \frac{G(m_t + m_f)}{V^2} \end{aligned} \tag{8.15}$$

で与えられる。ここで、この曲がる角度は相対軌道のものであって、テスト粒子の軌道のものではないということに注意する必要がある。いきなり回りが動いていてしかもテスト粒子が質量をもつというのは難しくなるので、とりあえずテスト粒子は質量を持つが、回りは止まっている場合を考える。この時、一回の散乱での速度変化は以下の式に従う。

$$\Delta v_{\text{垂直}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V \sin\theta = 2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{p/p_0}{1 + (p/p_0)^2} \tag{8.16}$$

$$\Delta v_{\text{平行}} = \frac{m_f}{m_t + m_f} V (1 - \cos\theta) = -2V \frac{m_f}{m_t + m_f} \frac{1}{1 + (p/p_0)^2} \tag{8.17}$$

$$\tag{8.18}$$

先週の話との違いは、速度変化に係数 $m_f/(m_f + m_t)$ がついていることだけである。これにまた単位時間当たりの衝突回数 $2\pi p n_f V dp$ を掛けて積分するが、$\Delta v_{\text{垂直}}$ については先週と同様 1 次の項は落ちる。それ以外については先週と同様に計算出来て

$$< \Delta v_{\text{垂直}}^2 > = \frac{2 n_f \Gamma}{V} \tag{8.19}$$

$$< \Delta v_{\text{平行}} > = -\left(1 + \frac{m_t}{m_f}\right) \frac{n_f \Gamma}{V^2} \tag{8.20}$$

$$< \Delta v_{\text{平行}}^2 > = \frac{n_f \Gamma}{V \ln \Lambda} \tag{8.21}$$

ここでΓは

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln\Lambda \tag{8.22}$$

である。ただし、 leading term でない項は適当に落ちてたりするので注意。

上の式で、$< \Delta v_{\text{垂直}}^2 >$の項は先週扱った角度の曲がる項と同じものである。先週の話と違うのは、ネットに速度が小さくなる成分がある、すなわち$< \Delta v_{\text{平行}} >$が負で有限の値をもつということである。

これは、実は 2 回前 (だっけ ?) にやった dynamical friction そのものである。つまり、回りが止まっているなかを粒子が走っていくと、それが回りを引っ張って動かすので、その分エネルギーを失って段々速度が落ちるわけである。これは、 m が大きい (m_f が小さい) 極限では $m_f n_f$ 、つまり質量密度によっていて、バックグラウンドの粒子の質量に依存しないことに注意してほしい。これに対し、他の項は$m_f^2 n_f$に比例していて、質量密度が同じでも粒子の質量が大きいほうが値が大きくなるのは先週にやった通りである。

さて、ここではとりあえず 1 次と 2 次の項を求めたわけだが、それより先の項については考えなくてもいいのだろうか ?ここでは粒子の軌道変化がたくさんの散乱のランダムな重ね合わせで書けるとした。この仮定が正しければ、たくさん散乱を受けた後の速度の分布は 1 次と 2 次のモーメントで決まるガウス分布になり、従って 3 次より高いモーメントの寄与は考えなくてもいいことになる。

問題はこの仮定が正しいかどうかであるが、実は理論的にはそれほど正確なわけではない。というのは、インパクトパラメータが例えば p_0 の程度の散乱というのも現実におき、その効果はそれ以外の散乱すべての寄与に比べてせいぜい $\ln\Lambda$ 程度でしか小さくないからである。まあ、しかし、そんなことをいっていても高次の項があっては計算出来ないし、とりあえず $\ln\Lambda$ 程度で小さいということも確かなので、以下高次のモーメントは考えない。

8.3.3　バックグラウンドが速度分布を持つ場合

というわけで、いよいよバックグラウンドが動いている場合ということになる。この時でも、相対速度の変化自体は前節に述べたもので正しいが、相対速度にフィールド粒子の速度成分が入ってくることになる。

以下、二種類の単位ベクトル系をとって、その上で考える。一つは $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ であり、元の空間に固定されている。もう一つは $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ であり、最初の成分を相対速度 $\boldsymbol{V}$ に平行にとる。従って、後者は相手の粒子によって違うわけである。この2つを考えることで、相対速度の変化をもとの静止系でのテスト粒子の変化に焼き直す。

まず、1次の項は相対速度に平行な成分だけであった。このことから、ある方向の速度変化は

$$< \Delta v_i > = < \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1 \Delta v_{\text{平行}} >' \tag{8.23}$$

ということになる。もうすこし精密に書くと、右辺はインパクトパラメータと相手の速度の積分なので、以下のように書けることになる。

$$\begin{aligned} < \Delta v_i > &= \int dp 2\pi p V \int d\mathbf{v}_f f(\mathbf{v}_f) \Delta v_i & (8.24)\\ &= -\Gamma(1 + m/m_f) \int \frac{f(\mathbf{v}_f)}{V^2} (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1) d\mathbf{v}_f & (8.25) \end{aligned}$$

ここで、$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_t - \boldsymbol{V}$ はフィールド粒子の速度、 f は速度分布関数である。 p についての積分を先にやったことに注意して欲しい。この積分は $v_f = 0$ であった時の結果をそのまま使っている。

さて、2次の項についてであるが、前節で見たように $\mathbf{v}$ に垂直な成分、すなわち $\boldsymbol{e}'_2$ と $\boldsymbol{e}'_3$ の成分を考えればいい。従って、一つの方向からくるフィールド粒子との散乱を考えた時には

$$\begin{aligned} < \Delta v_i \Delta v_j > &= [(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}'_2 + (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}'_3] \cdot [(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_2)\boldsymbol{e}'_2 + (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_3)\boldsymbol{e}'_3] < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \\ &= [(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_2)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_2) + (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_3)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_3)] < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \\ &= Q_{ij} < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \end{aligned} \tag{8.26}$$

これもまた分布関数を掛けて積分すると、結局

$$< \Delta v_i \Delta v_j > = \Gamma \int \frac{f(\mathbf{v}_f)}{V} Q_{ij} d\mathbf{v}_f \tag{8.27}$$

ということになる。これで一応必要な2次までの係数はすべて書けたわけだが、あまり計算するのに使い易い形ではない。というのは、$\boldsymbol{e}'_i$ とか V とかいったものがまだややこしい形ではいったままであるからである。しかし、もうちょっと簡単な形に書き直せることが知られている。まず、1次の項だが、

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial V_i}\frac{\partial V_i}{\partial v_i} = \frac{V_i}{V^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1}{V^2} \tag{8.28}$$

という都合のよい関係がある。変形はとくにややこしいところはないと思う。e'_1をそもそも $\boldsymbol{V}$ に平行にとったから上のように出来るわけである。このため、

$$h(\mathbf{v}) = \int \frac{f(\mathbf{v}_f)}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}_f|} d\mathbf{v}_f \tag{8.29}$$

なる関数 $h(\mathbf{v})$ を導入して、

$$< \Delta v_i >= -\Gamma(1+m/m_f)\frac{\partial h}{\partial v_i} \tag{8.30}$$

ということになる。

2 次の項についても同様な整理が可能である。Q_{ij}は$\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ の$\boldsymbol{e}'_2$と$\boldsymbol{e}'_3$によって張られる平面への写像の内積なので、$\boldsymbol{e}'_1$との内積の分をつけてやれば元の単位ベクトル同士の内積になる。つまり、

$$Q_{ij} = \delta_{ij} - (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_1)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_1) = \delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2} \tag{8.31}$$

したがって、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_i \partial v_j} = \frac{1}{V}\left(\delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{V^2}\right) = Q_{ij}/V \tag{8.32}$$

というわけで、

$$g(v) = \int f(\mathbf{v}_f)|\mathbf{v}-\mathbf{v}_f| d\mathbf{v}_f \tag{8.33}$$

とおけば、

$$< \Delta v_i \Delta v_j >= \Gamma \frac{\partial^2 g}{\partial v_i \partial v_j} \tag{8.34}$$

8.3.4 バックグラウンド速度分布が熱平衡の場合

前節では、バックグラウンドの速度分布が任意のものについて、実際に計算可能な式を導いた。ここでは、速度分布が等方的な場合について式を単純化してみる。

速度分布が等方的な場合、h や g の積分を、 $\mathbf{v}_f$の絶対値方向と角度方向に分けることができる。角度方向の積分については、 $\mathbf{v}$ と $\mathbf{v}_f$のなす角度を θとし、$\mu = \cos\theta$ とすれば、球面上での積分が、まず h については

$$\int \frac{d\mathbf{v}_f}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}_f|} = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{|v^2 - 2\mu v v_f + v_f^2|^{1/2}} = 4\pi \begin{cases} 1/v, & (v > v_f) \\ 1/v_f, & (v < v_f) \end{cases} \tag{8.35}$$

となる。これは、球面上に分布する電荷の作るポテンシャルと同じ式である。g についても同様に計算できて

$$\int |\mathbf{v}-\mathbf{v}_f| d\mathbf{v}_f = 2\pi \int_{-1}^{1} |v^2 - 2\mu v v_f + v_f^2|^{1/2} d\mu = \frac{4\pi}{3} \begin{cases} 3v + v_f^2/v, & (v > v_f) \\ 3v_f + v^2/vf, & (v < v_f) \end{cases} \tag{8.36}$$

となる。これから、

$$\begin{aligned} F_n(v) &= \int_0^v \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f \\ E_n(v) &= \int_v^\infty \left(\frac{v_f}{v}\right)^n f(v_f) dv_f \end{aligned} \tag{8.37}$$

というものを考えると、

$$
\begin{aligned}
h(v) &= 4\pi v[F_2(v) + E_1(v)] \\
g(v) &= \frac{4\pi v^3}{3}[3F_2(v) + F_4(v) + 3E_3(v) + E_1(v)] \qquad (8.38)
\end{aligned}
$$

これらから、最終的な結果、すなわち、バックグラウンドが動いている時の、速度に平行な速度変化と垂直なそれを書き下せることになる。それらは、結局、

$$
\begin{aligned}
< \Delta v_{\text{平行}} > &= -4\pi\Gamma\left(1+\frac{m}{m_f}\right)F_2(v) \qquad (8.39)\\
< \Delta v^2_{\text{平行}} > &= \frac{8\pi\Gamma v}{3}[F_4(v) + E_1(v)] \qquad (8.40)\\
< \Delta v^2_{\text{垂直}} > &= \frac{8\pi\Gamma v}{3}[3F_2(v) - F_4(v) + 2NE_1(v)] \qquad (8.41)\\
& \qquad (8.42)
\end{aligned}
$$

これらから、粒子のエネルギーの変化 ΔE を出すことができる。

$$
\Delta E = v\Delta v_{\text{平行}} + < \Delta v^2_{\text{平行}} > /2 + < \Delta v^2_{\text{垂直}} > /2 \qquad (8.43)
$$

と書けるので、1 次の項は

$$
< \Delta E >= 4\pi\Gamma v\left[E_1(v) - \frac{m}{m_f}F_2(v)\right] \qquad (8.44)
$$

となる。2 次の項については、$(v\Delta v_{\text{平行}})^2$以外の項は小さいので無視すると

$$
< \Delta E^2 >= \frac{8\pi\Gamma v^3}{3}\left[F_4(v) + E_1(v)\right] \qquad (8.45)
$$

となる。

さて、速度分布を熱平衡、すなわち

$$
f_0(\mathbf{v}) = \frac{n_f}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \qquad (8.46)
$$

とすると、上の係数等を具体的に計算できることになって、その形は

$$
\begin{aligned}
< \Delta v_{\text{平行}} > &= -4\frac{n_f\Gamma}{\sigma^2}\left(1+\frac{m}{m_f}\right)G(x) \qquad (8.47)\\
< \Delta v^2_{\text{平行}} > &= 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}G(x)/x \qquad (8.48)\\
< \Delta v^2_{\text{垂直}} > &= 2\sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}\frac{\mathrm{erf}(x) - G(x)}{x} \qquad (8.49)\\
< \Delta E > &= \sqrt{2}\frac{n_f\Gamma}{\sigma}\left[-\frac{m}{m_f}\mathrm{erf}(x) + \left(1+\frac{m}{m_f}\right)x\mathrm{erf}'(x)\right] \qquad (8.50)
\end{aligned}
$$

ここで erfは誤差関数であり、

$$
G(x) = \frac{\mathrm{erf}(x) - x\mathrm{erf}'(x)}{2x^2} \qquad (8.51)
$$

また $x = v_t/(\sqrt{2}\sigma)$ である。

山ほど式はでてきたものの、全然なんだかわからないという気分になった人もまあいるのではないかと思うので、以下、上の式の意味についてちょっと考えてみよう。

まず、速度の1次の項を見てみる。これは、速度分布にはF_2だけを通して依存しているということに注目して欲しい。例えば、マックスウェル分布のようなものを考えた時、vが大きい極限では$F_2 \sim 1/(2\pi v^2)$となるので、回りが止まっているときと同じく速度変化は速度の2乗に反比例する。これに対して、vが小さい極限では、fを一定と見なすことが出来るので$F_2 \propto v$となる。

これは、タイムスケールを考えてみると、速度が大きい極限では減速のタイムスケールがv^3であるのに対し、逆の極限では一定になるということである。すなわち、非常に速度が大きい粒子が出来てしまうとこれはなかなか減速しない。もちろん、自己重力系の場合には、そのようなものは系のなかに留まるのが困難だということもあるが。

これに対し、速度が小さいほうではタイムスケールがある一定値、つまりは$v \sim \sigma$で決まる値あたりになるということである。

この1次の項は、前に述べたようにdynamical frictionを表している。これが問題になる場面は、例えば恒星系が質量の違う2つの成分から出来ているような場合である。力学平衡で、分布関数に質量依存がないようなものを考えると、これは熱平衡から遠くはなれている。従って、上の式で決まるタイムスケールで重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得る。

なお、、自己重力系ではこのエネルギー交換の結果熱平衡に向かうとは限らないということに注意する必要がある。つまり、重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得るということは、それぞれの分布関数が変わり、空間分布も変わるということである。具体的には、重いものは中心に落ちるし、軽いものは外側に押し出される。

さて、次に、2次の項を見てみる。速度に平行な成分も垂直な成分も、vが大きい極限では0にいく。特に、垂直な成分はvに反比例する。これに対し、速度が0の極限では、どちらも一定値に収束する。これは停止している極限でも、回りの粒子によって揺さぶられるということを表しているわけである。

第9章　2体緩和のタイムスケール、フォッカー・プランク方程式

前回は、実際にバックグラウンドの粒子も動いている場合について、2体緩和によって粒子の速度、エネルギーがどう変化するかの期待値（のモーメント）を求めた。今日は、前回の結果を使って、まずいくつかの重要な場合について2体緩和がどのように働くかを、数値実験と合わせて議論する。次に、上の結果から分布関数の変化に対する方程式を導くことを考える。

9.1　2体緩和のタイムスケール

「タイムスケール」というのは、普通ある量 x の時間変化が

$$\frac{dx}{dt} = (-)\frac{x}{T} \tag{9.1}$$

なる形で書ける時の T のことである。もちろん、一般には T は x を含むいろんなものの関数である。

そういった意味で考えやすいのは、温度（平均運動エネルギ）が違う2つの空間一様な分布が重なりあっている時に、どのようにして2つが近付いていくかというのものである。これは、もちろん時間が立てば熱平衡に近付くわけである。以下、実際に計算してみる。

9.1.1　等分配のタイムスケール :理論

今、フィールドに質量 m_fの粒子が一様に分布しており、テスト粒子として質量 m_tのものがこれもまた一様に分布しているとする。さらに、どちらも速度分布はマックスウェルで与えられるとする。ここでは等分配を考えるので、それぞれの粒子1個当たりのエネルギーを E_f, E_t と書く。今、テスト粒子のエネルギー変化の平均を考えると、

$$\frac{d<E_t>}{dt} = 4\pi\int v_t^2 f(v_t) <\Delta E_t> dv_t \tag{9.2}$$

と書けることになる。これに前回求めた $<\Delta E>$ を入れて実際に積分を実行することができて、結果は

$$\frac{d<E_t>}{dt} = 2\sqrt{6/\pi}\frac{m_t n_f \Gamma}{m_f}\frac{<E_f> - <E_t>}{(v_t^2+v_f^2)^{3/2}} \tag{9.3}$$

となる。

ここで、いくつかの極限的な場合を考えておくことは有益であろう。まず、$m_t >> m_f$で $v_t \sim v_f$ という状況を考えてみる。これはつまり非常に重いものと軽いものが、同じような空間分布、速度

分布で広がっている場合である。この時は上の式で $E_t >> E_f$ なので、

$$\frac{d\log < E_t >}{dt} = -\sqrt{3/\pi}\frac{m_t n_f \Gamma}{m_f v^3} \tag{9.4}$$

となる。なお、この時、変化率はテスト粒子の速度に分母の v_t^2 を通してしか依存しないので、$v_t \to 0$ の極限でエネルギー変化（減速）のタイムスケールは一定値にいき、それは $v_t \sim v_f$ の時の値とそれほど違わない。

次に、$m_t \sim m_f$ で $v_t << v_f$ という状況を考えてみる。この時は上の式を

$$\frac{d(< E_t > /m_t)}{dt} = 2\sqrt{6/\pi}\frac{n_f \Gamma}{m_f}\frac{< E_f >}{2v_f^3} = 8\sqrt{6\pi}G^2 \ln\Lambda n_f m_f < E_f > v_f^{-3} \tag{9.5}$$

となる。ここで

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln\Lambda \tag{9.6}$$

を使った。さらに、$E_t = m_t v_t^2/2$ などを使って書き直せば

$$\frac{d(v_t^2)}{dt} = 4\sqrt{6\pi}G^2 \ln\Lambda n_f m_f^2 v_f^{-1} \tag{9.7}$$

を得る。つまり、速度が小さい極限では、一定の率でエネルギーをもらうわけである。言いかえれば、温度が2倍になるタイムスケールというものは、温度に比例して小さくなるともいえる。

さて、通常「2体緩和のタイムスケール」という時には何を指しているかというと、この等分配のタイムスケールのことではないのが普通である。が、時と場合によっていろんなものが出てくるが、まあ同じようなものである。普通に使われるのは、

$$t_r = \frac{1}{3}\frac{v_m^2}{< v_{\text{平行}}^2 >_{v=v_m}} = \frac{v_m^3}{1.22 n\Gamma} = \frac{0.065 v_m^3}{n m^2 G^2 \log\Lambda} \tag{9.8}$$

とするものである。ここで v_m は r.m.s. 速度である。$1/3$ になにか意味があるわけではなく、こう定義したというだけである。

これは、ローカルな量で定義されていて、例えば系全体の緩和時間といったものを考えるのにはちょっと不便なこともある。というわけで、いわゆる half-mass relaxation time t_{rh} というものを導入しておく。これは、半径 r_h の中に質量の $1/2$ があるとして、その中の密度は一様であるとし、また前にやったようにビリアル定理から $T \sim 0.2GM^2/r_h$ といった関係を使えばでてくる。これは

$$t_{rh} = 0.138\frac{N r_h^{3/2}}{M^{1/2}G^{1/2}\log\Lambda} \tag{9.9}$$

となる。

ここで注意しないといけないことは、t_{rh} はあくまでも球対称に近い系の half mass radius のあたりでの緩和時間であるに過ぎないということである。従って、球状星団全体の緩和時間とか、あるいは楕円銀河、銀河団といったものには有効な概念であるが、球対称から大きくずれた銀河とか、あるいは half mass radius のずっと外側、ずっと内側では全く違ったものになっていることに注意する必要がある。さらに、速度分布が非等方であるとか、回転がメインであるとかでもまた話が全く変わってくる。このような場合、ローカルな緩和時間、あるいはエネルギー変化自体の式に戻って考えないと、タイムスケールについて全く間違った推定をしてしまうことになる。

これがもっともクリティカルに効いて来るのは、実際の天体においてというよりはむしろシミュレーションにおいてである。これについては後で具体例で議論しよう。

9.1.2 等分配のタイムスケール :実験

さて、実際に数値実験でエネルギー等分配に近付く過程を見て、これまで理論的に考えてきたもの、特に積分の上限がどうなっているかみようというわけだが、これはそれほど簡単ではない。というのは、「空間分布が無限一様」とか「等温」とかいう初期条件が設定できないためである。

一例として、Farouki and Salpeter (1982 APJ 253, 512, 1994 APJ 427, 676) の実験を取り上げてみる。彼らは、実際に2種類の違う質量の粒子からなる、初期に力学平衡にある系を考えた。初期には単位質量あたりの運動エネルギーが同じであるようにした(つまり、空間分布、速度分布ともに同じということ)。したがって、重い方が熱平衡に比べて余計に運動エネルギーを持っていることになる。

正確にいうと、実際に力学平衡にある系を作ったわけではなく、適当に球とか立方体のなかに一様に粒子をばらまいて、落ちつくまで待ってから使うという方法をとっている。速度は、全体としてビリアル平衡になるようにマックスウェル分布を与えた。

さて、この系を進化させると何が起こるかをまず考えてみる。重い方の温度が高いので、平均的には重い方から軽い方にエネルギーが流れるであろう。しかし、その結果温度が近付くであろうか?これはとりあえず何ともいえない。というのは、ポテンシャルが一様ではないのでエネルギーの変化は粒子の速度分布だけでなく密度分布、すなわち粒子の位置と重力エネルギにも影響するからである。エネルギーの変化が温度にどう影響するかは、もともとの粒子の分布にも依存するわけである。

さらにややこしいことに、$\log \Lambda$ がなんであるかという問題もある。通常、N 体計算においては、2粒子間の重力ポテンシャル $\phi_{ij} = -Gm_im_j/r_{ij}$ をそのまま使わないで、典型的には

$$\phi_{ij} = -G\frac{m_im_j}{r_{ij}^2 + \epsilon^2} \tag{9.10}$$

という形に「ソフトニング」したものを使う。これは、数値計算上の困難を避けるのが第一義的な理由である。つまり、純粋な $1/r$ ポテンシャルを使うと、2つの粒子が無限に近付き得る。無限に近付くこと自体は問題ではないが、この時速度と重力エネルギーも無限大になる。従って、非常に高い精度で計算しても、エネルギーの誤差が非常に大きくなってしまう。

もちろん、近付いたら解析解に切替える、あるいは摂動法にする、または座標変換をして特異性を消すといった方法があるが、どれもかなり面倒である。そこで、多くの数値実験で、ポテンシャルをすこし変えて原点で発散しないようにする。この場合、インパクトパラメータが ϵ よりも小さい時にはほとんど曲がらなくなるので、速度変化の積分の下のほうを修正する必要が起きる。大雑把にいって $p < \epsilon$ の寄与を無視すればよいことになる。

次のページの図に典型的な結果を示す。Farouki and Salpeter では、温度とかエネルギー変化を直接測定するのは断念し、その代わりに軽い粒子の half mass radius をとった。彼らは緩和時間として

$$T_R = \frac{R_0}{dR/dt} \tag{9.11}$$

つまり、半径の変化のタイムスケールをもって緩和時間であるとした。これはもちろん定数を別にすれば上で考えた定義と一致するものになっている。

この結果から、彼らは $\log \Lambda$ と粒子数 N について以下のような関係を得た

上と下は ϵ の大きさが違い、上は R/N の程度、下は $R/N^{1/3}$ の程度である。ここで F は緩和時間を

$$t_{rh} = F\frac{N}{26\log\Lambda}t_d \tag{9.12}$$

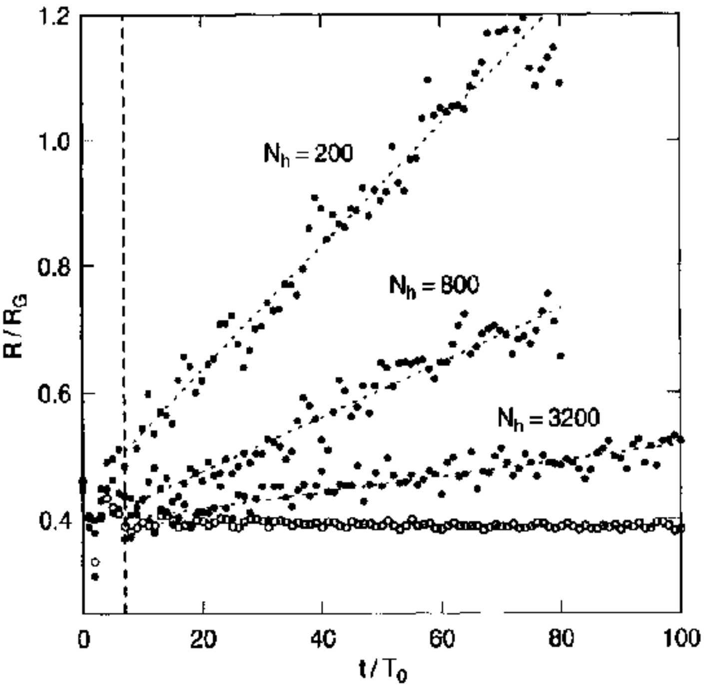


Fig. 1.—Time evolution of the half-mass radii $R_l(t)$ for light particles for typical runs with $c_h = c_{h1}$ and various values of N_h, together with least-squares fits (*dashed lines*) to the data for $t \geq 7T_0$ [the open dots show the half-mass radius $R_h(t)$ of heavy particles for the run with $N_h = 3200$].

と書くことにしたために出てくる定数である。26 という定数は、前に出てきた t_{rh} を t_d を使って書き直したので、定数の 0.138 が違う値になっているだけのものである。

彼らの主な主張は、「この振舞いは上のカットオフがシステムサイズであるという理論と一致している」というものである。それはまあかなり確かといってもよいと思われる。が、F の値を推定すると 10 程度になり、かなり大き過ぎるものになっている。これは、定義の違いもあるので評価はちょっと難しい。

もうちょっと良くあっている例を紹介しておこう。

これは Spurzem and Takahashi (1995, MNRAS 272, 772) によるものである。ここでは、緩和時間といった定義のはっきりしないものを比べているのではなく、系の構造そのものの変化を、N 体計算の結果とモーメント方程式から導いた (球対称、等方の) フォッカー・プランク方程式の数値解とで比べている。結果の一致は素晴らしいものである。

9.1.3 応用 (問題)

さて、2 体緩和についていろいろやってきたので、ちょっと手を動かして計算してみるのもいいかと思う。以下に問題を出す。レポート課題の一つと思ってもらってよい。

(2-1a)Singular isothermal な分布をしたダークマターハローのなかに、自己重力的でない無限に薄い星のディスクがあるとする。ダークマター粒子の質量が無限小ならばディスクは薄いままだが、数値計算では 2 体緩和のため厚くなる。厚さが 2 倍になるタイムスケールを、厚さ、中心からの距離、その内側のダークマターハローの質量、ハロー構成粒子の質量の関数とし

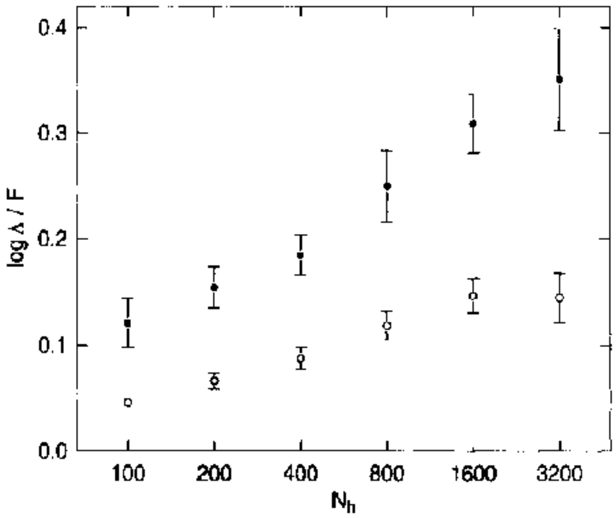


FIG. 4.—Dependence of the quantity (log Λ)/F on the number N_h of heavy particles for runs with "small" softening, $c_h = c_{h1}$ (*solid dots*), and "large" softening, $c_h = c_{h2}$ (*open dots*).

て求めよ。なお、結果は回転周期に対する比で表すこと。

(2-1b) 上で求めたものから、それらしいパラメータを使って太陽がある当たりでディスクが厚くなる様子の近似的な解析解を求めよ。ただし、時間はハロー構成粒子の質量でスケールできることに注意せよ。

(2-1c) 自己重力が無視できない薄いディスクについて、ディスク内の星同士の2体緩和により厚さが2倍になるタイムスケールを上と同様に求めよ。ただし、簡単のためダークハローがあって自己重力の効果は小さいとする。また、ダークハローに由来する2体緩和はないものとする。

(2-2a)SPH法とは、流体を大きさをもった粒子の重ね合わせで表現する計算法である。無衝突系であるダークマターとホットガスが力学平衡にある状態を、SPH法とN体を組み合わせて計算した場合、2体緩和の効果はどのように働くと考えられるか、例をあげて定量的に議論せよ。

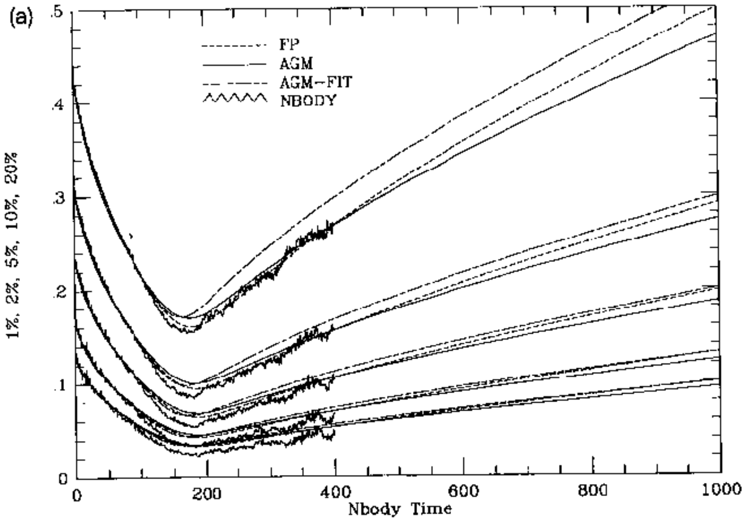
(2-2b) さらに、適当な最近のSPHとN体を組み合わせて行なった計算の論文を読んで、2体緩和の効果を評価し、それが結論に影響しているかどうかを考察せよ。

9.2 フォッカープランク近似

さて、数値計算がどうたらという話を別にすれば、2体緩和を考える理由はそれにより系がどう進化するかを理解するということである。そのためには、粒子の速度変化のモーメントの式から、分布関数の変化についての方程式を導くことが有用であろう。

粒子の物理量の変化の1次と2次のモーメントから（高次の項の寄与を無視して）分布関数に対する移流拡散方程式を導くことができる。この操作を通常フォッカープランク近似といい、でてきた方程式をフォッカープランク方程式という。以下、その導出を行なってみる。これは、ボルツマン方程式の衝突項を求めることに対応する。

今、$P(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})d\Delta v$ が、速度 $\mathbf{v}$ の粒子が、時間Δtの間に速度変化$\Delta\mathbf{v}$（の近傍の $d\Delta\mathbf{v}$ の範囲）を



受ける確率であるとする。すると、 Δt たった後の分布関数は以下のように書ける

$$f(\mathbf{v},t+\Delta t)=\int f(\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v},t)P(\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v},\Delta\mathbf{v})d\Delta\mathbf{v} \tag{9.13}$$

これは $\mathbf{v}$ のところにやってくる可能性があるものすべてについての和をとっただけである。ここで、両辺を展開することを考える。左辺は

$$f+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t \tag{9.14}$$

である。右辺は

$$\int\left[fP-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(fP)}{\partial v_i}\Delta v_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2(fP)}{\partial v_i\partial v_j}\Delta v_i\Delta v_j+...\right]d\Delta\mathbf{v} \tag{9.15}$$

ここで、

$$\begin{aligned}<\Delta v_i>\Delta t &= \int P\Delta v_i d\Delta\mathbf{v} &(9.16)\\ <\Delta v_i\Delta v_j>\Delta t &= \int P\Delta v_i\Delta v_j d\Delta\mathbf{v} &(9.17)\end{aligned}$$

とおけることを使えば、微分と積分の順序を入れ換えて

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(f<\Delta v_i>}{\partial v_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2(f<\Delta v_i\Delta v_j>)}{\partial v_i\partial v_j} \tag{9.18}$$

これで、理屈の上では分布関数の変化が計算できるということになる。もちろん、実際にこれを解いて自己重力系の進化を調べるのは、必ずしも容易ではない。その理由は、分布関数が 6 次元位相空間上で定義されること、それがジーンズの定理を満たすように進化しなければいけないことである。具体的には、

- そもそも、球対称とかの仮定なしでは運動の積分だけの関数であるような分布関数が求まらない
- 実際に運動の積分の関数として分布関数が書ける場合でも、拡散係数を求めるのはそれほど容易ではない。

- 実際に拡散係数が求まっても、自己重力系なので分布関数が変化すると同時にポテンシャルも変化することになり、それによって粒子の軌道が断熱的に変化することになる。そのへんを考慮してつじつまがあうような計算プログラムを作るのは容易ではない。

というような困難があり、従来は、分布関数をエネルギーだけの関数と近似する計算しか行なわれていなかった。1994年頃に、Takahashiが初めて$f(E,J)$の場合に信頼できる結果を得ることに成功した。しかし、これも、拡散係数を求める時に、フィールドの分布は等方的であるという近似を行なっている。

なお、モンテカルロ法など、もうちょっといい加減な方法ではある程度のことは出来ている。

第10章　熱力学的進化

この講義もいつのまにか終りに近付いていて、理論上は 2/4 まで出来るのかもしれないけどちょっとつごうもあるので 1/28 でおしまいにする。で、さらに休講が入ってもうしわけないが、 1/21 は出張のため休講にする。というわけで、今週と次回でおしまいということになる。

今日は、熱力学的な進化ということで、いくつかの理想化された場合を考えておく。なお、今日はまた流体近似で話をする。自己重力質点系の熱力学的な進化をそのまま考えるのはほとんど不可能だからである。原理的には、前回やったような Fokker-Planck 方程式の平衡解をつくって、その安定性を調べればできるわけだが、これまでそのような研究はあまり行なわれていない。また、熱平衡状態とその安定性に関するかぎり、ガスか質点系かという違いには意味がない。まあ、そういうわけで、ガスで考えるということにもそれなりの意味はある。

もちろん、平衡状態からのずれの時間発展はガスか質点系かで大きく違うわけだが、おもな違いは熱伝導の係数の密度、温度への依存の違いとして理解できる。

10.1　等温状態の安定性

まず、もっとも単純な場合ということで、等温の平衡状態を考える。話を簡単にするために、球対称の断熱壁の中のガスということにする。平衡状態は、静水圧平衡の式

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dM} &= -\frac{M}{4\pi r^4}, && (10.1)\\ \frac{dr}{dM} &= \frac{1}{4\pi r^2\rho}, && (10.2) \end{aligned}$$

を考えればいい。例によって球対称で、$M(r)$ は半径 r の中の質量、p とρは圧力と密度である。面倒なので、単位系として $G = M = R = 1$ となるようにとる。G は重力定数、M は壁（断熱壁）のなかの全質量、R は断熱壁の半径である。

温度は、状態方程式

$$p = \rho T \tag{10.3}$$

で決まる。単位質量当たりのエントロピーは

$$s = \ln(T^{3/2}\rho^{-1}) \tag{10.4}$$

であり、境界条件は

$$\begin{aligned} r &= 0 \quad \text{for} \quad M = 0,\\ r &= 1 \quad \text{for} \quad M = 1. && (10.5) \end{aligned}$$

である。この解自体は、すでに何度か扱ったように数値的に求めることが出来る。

以下、熱力学的安定性について議論するわけだが、これにはいろんな流儀があって、なんだかよく理屈がわからないものもある。等温の自己重力ガスの安定性について初めて議論したのは Antonov (1961) であり、もうちょっと詳しい議論が Lynden-Bell & Wood (1968) によってなされた。しかし、これらはいずれも真の意味での安定性解析、すなわち、平衡解に対する摂動を考え、それが成長するかどうかをしらべたというものではない。

そのような意味での安定性解析を初めて適用したのは、 Hachisu & Sugimoto (1978) である。彼らの方法は、大雑把にいうと以下のようなものである。

- 平衡解の回りの線形化した摂動に対する方程式を作る
- 適当な制約条件のもとで、全エントロピーの 2 次の変分ΔS^2を最大にするような摂動を求める。これは、具体的な手続きとしては固有値問題を解くことに帰着される。
- 仮に求まったΔS^2が正であれば、これは、平衡状態がエントロピー極大の状態ではない、したがって、不安定点であるということを意味する。

等温状態なのでエントロピーは通常ならば極大値である。これは、任意のエントロピーの再分配に対して、$\Delta S = 0, \Delta S^2 < 0$ となっているということを意味する。

これは、熱をちょっとどこかからとって別のところに与えると、それによる温度変化を考えなければ (一次の変分) エントロピーは変わらない。また、温度変化を考えると (二次の変分)、熱をもらった方は温度が上がっているのでもらうエントロピーは少なく、出したほうは逆に温度が下がるので出ていくエントロピーが多い、従って、系全体としては普通は摂動を与えるとエントロピーが減る、すなわち、平衡状態はエントロピー極大に相当している。

以上から、もし、熱を取り去った時に温度が上がるようなことがあればエントロピー極大ではないかもしれないということが想像できよう。もちろん、常識的な熱力学の対象ではそんなことはあり得ないわけだが、自己重力系ではそうではないというのはすでにビリアル定理のところでやった通りである。

つまり、自己重力系を全体として考えると、熱を奪うと系が小さくなり、単位質量あたりの運動エネルギー、すなわち温度が大きくなるわけである。

断熱壁で囲んだ系では話はもう少しややこしいが、実際に、十分温度が低い、重力の影響が大きいような系ではΔS^2が正になるということを示したのが Hachisu & Sugimoto である。

この解析は非常に見事なものなので、是非元論文 (PTP 60, 13) を読んで見て欲しい。まあ、それはそれとして、ここではもう少し違った解析方法をとってみよう。

10.1.1 等温状態からの時間発展

Hachisu & Sugimoto の方法では、摂動に対してΔS^2を求め、その符号から安定か不安定かを決めている。この方法では、もちろん、熱力学的に安定かどうかをきめることは出来るが、不安定性がどのように発展するかを調べることはできない。というのは、そのためには熱伝導の式もカップルさせて線形応答を求めないといけないのに、そのような解析は行なっていないからである。というわけで、しばらく前にそういう解析をやってみた (Makino and Hut 1991、APJ 383, 181) ので、今日はその結果に基づいて話す。

熱伝導の式は

$$K\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{L}{4\pi r^2} \tag{10.6}$$

と書ける。ここで、 $L(r)$ は半径 r のところでの熱流束であり、 K は熱伝導の係数である。K は温度、密度の関数だが、ここでは等温に近いので密度だけの関数として

$$K = \rho^{\alpha} \tag{10.7}$$

という形を仮定する。放射伝達であれば $\alpha = -1$ である。

ここで細かい話は省くが、自己重力質点系の場合は、密度が高いほうが緩和が速かった。このことを熱伝導係数でむりやりに表現すると、$\alpha = 1$ となる。

エントロピーについての式は

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi r^2 \rho T \frac{\partial s}{\partial t}|_M. \tag{10.8}$$

で与えられ、境界条件は The boundary conditions are

$$L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \quad \text{and} \quad M = 1. \tag{10.9}$$

ということになる。

10.1.2　線形化した方程式

微小な摂動に δ をつけることにして、線形化した方程式は

$$\frac{d\delta \ln p}{dM} = \frac{M}{4\pi p r^4}(\delta \ln p + 4\delta \ln r), \tag{10.10}$$

$$\frac{d\delta \ln r}{dM} = -\frac{1}{4\pi r^3 \rho}(3\delta \ln r + \delta \ln \rho), \tag{10.11}$$

$$\delta \ln p = \delta \ln \rho + \delta \ln T, \tag{10.12}$$

$$\delta s = \frac{3}{2}\delta \ln T - \delta \ln \rho, \tag{10.13}$$

$$\tag{10.14}$$

境界条件は

$$3\delta \ln r + \delta \ln \rho = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{10.15}$$

$$\delta \ln r = 0 \qquad\qquad \text{for} \quad M = 1 \tag{10.16}$$

$$\tag{10.17}$$

ということになる。

熱流束とエントロピーの変化については、もとの式が線形なのでそのまま使える。つまり、 $L = \delta L$ なので、 $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \delta T}{\partial r}$ であり、また $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \delta s}{\partial t}$ となる。これらは始めから一次の微小量しか含んでいない。

この方程式系に対して、

$$\begin{aligned} \delta \ln p = &\ \delta \ln p_0 e^{\lambda t}, \\ \delta \ln r = &\ \delta \ln r_0 e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\ln\rho =& \quad \delta\ln\rho_0 e^{\lambda t}, \\ \delta\ln T =& \quad \delta\ln T_0 e^{\lambda t}, \\ \delta L =& \quad \delta L_0 e^{\lambda t}, \\ \delta s =& \quad \delta s_0 e^{\lambda t}. \end{aligned} \tag{10.18}$$

という形をした解を捜すわけである。ここで、添字 0 がついたものは時間発展解の空間依存性を表す。線形化したので固有モードが出てきて欲しいなという解析をしているわけである。これらを線形化した方程式に入れると、固有値問題

$$\frac{d\delta\ln p_0}{dM} = \quad \tfrac{M}{4\pi p r^4}(\delta\ln p_0 + 4\delta\ln r_0) \quad , \tag{10.19}$$

$$\frac{d\delta\ln r_0}{dM} = \quad -\tfrac{1}{4\pi r^3\rho}(3\delta\ln r_0 + \delta\ln\rho_0) \quad , \tag{10.20}$$

$$KT\frac{d\delta\ln T_0}{dM} = \quad -\tfrac{\delta L_0}{(4\pi r^2)^2\rho_0} \quad , \tfrac{d\delta L_0}{dM} = \quad -\lambda T\delta s_0 \quad , \tag{10.21}$$

$$\delta\ln p_0 = \quad \delta\ln\rho_0 + \delta\ln T_0 \quad , \tag{10.22}$$

$$\delta s_0 = \quad \tfrac{3}{2}\delta\ln T_0 - \delta\ln\rho_0 \quad . \tag{10.23}$$

が出てくる。ただし、境界条件は

$$3\delta\ln r_0 + \delta\ln\rho_0 = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{10.24}$$

$$\delta\ln r_0 = 0 \quad \text{for} \quad M = 1 \tag{10.25}$$

$$\delta L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \tag{10.26}$$

$$\delta L = 0 \quad \text{for} \quad M = 1 \tag{10.27}$$

ということになる。

さて、これを解かないといけないわけだが、数値解法まで触れている余裕がないので詳細は省く。我々はいわゆる shooting method を使ったが、本当は緩和法のほうが安全であったかもしれない。

以下、どういう答が求まり、それはどういうものかということを簡単にまとめよう。

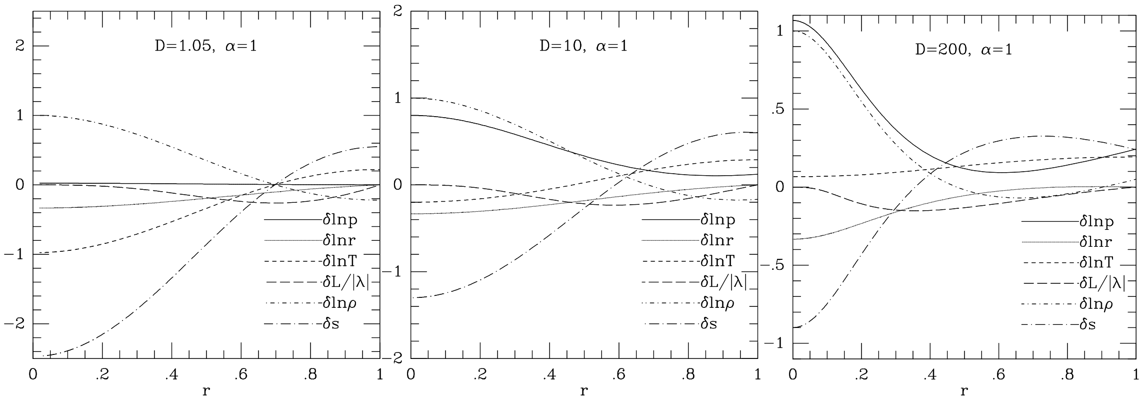
10.1.3　安定領域

面倒なので以下 $\alpha = 1$ の場合だけを考える。以下に示すのは第一固有値（ここではすべての固有値が負なので、最も 0 に近いもの）に対応する固有関数である。

ここで、D は中心の密度と壁のすぐ内側での密度の比である。$D = 1$ というのは、温度が無限に高くて重力エネルギーが相対的に小さい極限である。これに対し、$D = \infty$ は singular isothermal に対応する。

$D = 1.05$ は、要するに重力が無視できる場合である。この時はもちろん応答はベッセル関数かなにかで書ける。注意して欲しいことは、圧力の変化がないこと、エントロピーと温度がちゃんと比例関係にあることである。これは、重力が無視できるので普通の振舞いをしているわけである。つまり、密度、温度の変化が圧力変化がなくなるように働く。これは、静水圧平衡を保つためである。

なお、ここでは、中心から熱を奪って外に与えるようなものを考えているが、その逆も固有関数であることに注意してほしい。これは、線形化した方程式の解だからである。

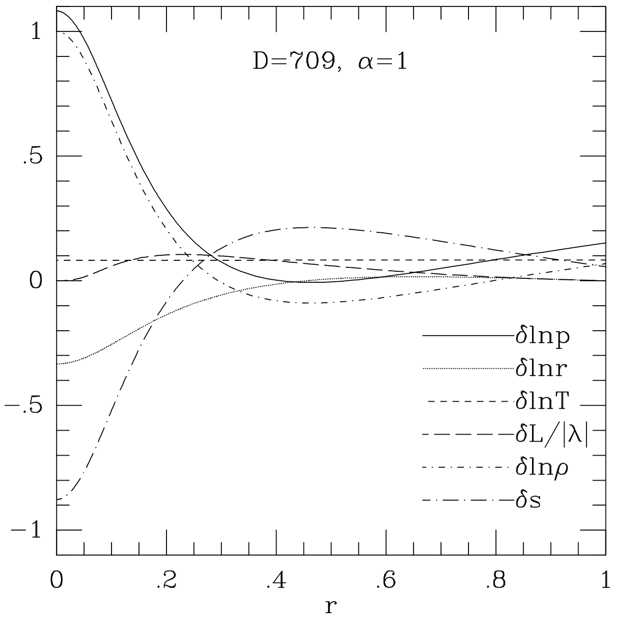


さて、少し中心密度を上げると、摂動に対する圧力の応答が変わって、中心で圧力が上がるようになる。これは、熱を奪われることに応答して縮むと、重力も強くなるので、つじつまをあわせるにはもうすこし縮んで圧力を上げる必要が起きるからである。このために、温度の応答は与えたエントロピーからはずれてくる。もっとどんどん温度をさげて、D を大きくすると、ついには、熱を奪ったにもかかわらず、温度が中心でも上昇するようになる。

もちろん、この解は負の固有値に対応するものであり、いぜんとして安定である。それは、温度勾配としては依然として中心に向かって下がっていて、ちゃんとエントロピー変化を打ち消す向きに熱がながれるからである。

10.1.4 中立安定

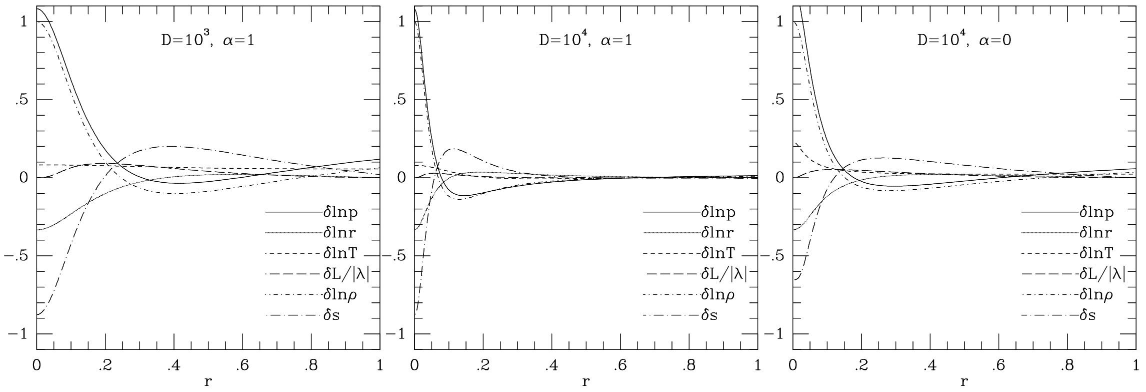
さて、もっと D を大きくすると、ついには固有値が 0、すなわち与えられた摂動が減衰しなくなる。この状況を以下に示す。与えられた摂動が減衰しないということは、温度勾配ができないというこ

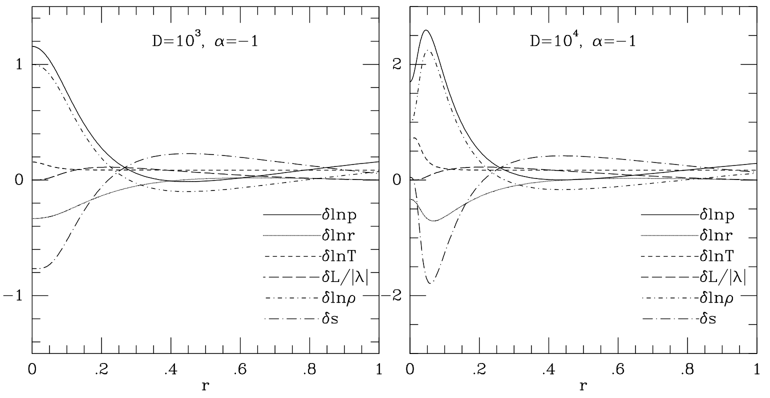


とである。実際、応答は δT が定数になっている。

10.1.5　重力熱力学的安定

さらにもっと温度を下げ、D を大きくすると、ついには固有値が正になる。以下にいくつかの例を示す





たくさん例を出したが、どの場合でも中心でエントロピーが減っているのに温度が大きく上がり、それが外側の温度上昇を追い越している。その結果中心から外に向かう熱流ができるのである。

なお、ちょっと注意して欲しいのは、α の値によって応答が大きく違うことである。D が同じ時、$\alpha = 1$ の方が$\alpha = -1$ に比べて中心に集まったような応答になっている。これは、熱伝導が密度の高いところで速いためと考えて良い。

なお、以下で関係するのでここで述べておくが、D の値と系の全エネルギーの間の関係は単純ではない。安定領域では D を大きくするためには系を冷やせばよく、したがってエネルギーと D は一対一に対応する。しかし、$D = 709$ の中立安定点はエネルギーの極小値になっていて、これよりエネルギーの低い熱平衡解は存在しない。言い換えれば、$D > 709$ の解には、それと同じエネルギーをもった安定解が常に存在する。

10.2 有限振幅での進化

さて、このあとどうなるかということを調べるためには、数値計算をする必要がある。Hachisu *et al.* (1978) は、自己重力流体についてそのような数値計算を行なった。

結果の詳細は省くが、重要なことは、中心から熱をとったときに「自己相似解」が現れる場合があるということである。

中心に熱を与えると、中心は温度を下げつつ膨張する。このときは、結局最終的には安定平衡にいってしまうことになる。しかし、中心から熱をとったときにはどこかいき先があるわけではない。

この後の進化は、熱伝導のタイムスケールによる。密度が上がるとタイムスケールが長くなるような場合には、大雑把にいってかなり大きなものが全体として収縮していく。

これに対し、恒星系に対応する場合では、密度が上がるとタイムスケールが短くなる。この時は、密度の高い「コア」が出来、それがどんどん収縮を続けるということになる。これに関する詳細な解析は Lynden-Bell & Eggleton (1980, MNRAS 191, 483) に与えられているので以下考え方だけを示す。

自己相似解というのは、ある物理量 y が

$$y(r,t) = y_0(t) y_*[r/r_0(t)]. \tag{10.28}$$

と書けるようなものである。さらに、r_0 と y_0 が時間のベキで書ける（これは数値計算の結果がそうなっている）とすれば、

$$r_0 = (t_0 - t)^\beta, \tag{10.29}$$

とか

$$y_0 = (t_0 - t)^\gamma, \tag{10.30}$$

と書け、結局

$$y_0 = r_0^{\gamma/\beta}. \tag{10.31}$$

という関係が出てくる。

自己相似解ということで、いろんな無次元量は一定と考えられる。特に、今コアというものを考えて、その半径を r_c とすれば

$$\sigma^2 \propto \frac{GM_c}{r_c} \sim \rho_0 r_0^2. \tag{10.32}$$

ここで ρ_0 を

$$\rho_0 = r_0^\alpha, \tag{10.33}$$

と書けば

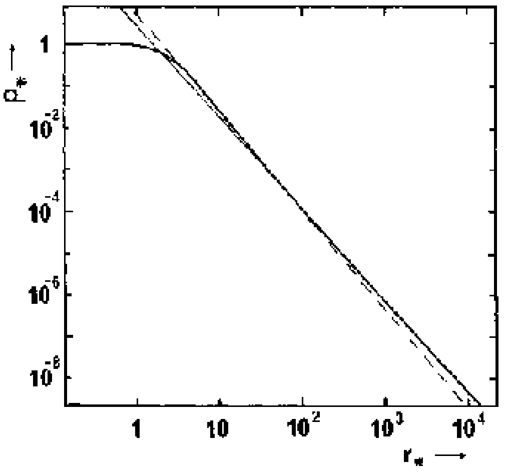
$$r_0 = (t_0 - t)^{2/(6+\alpha)}. \tag{10.34}$$

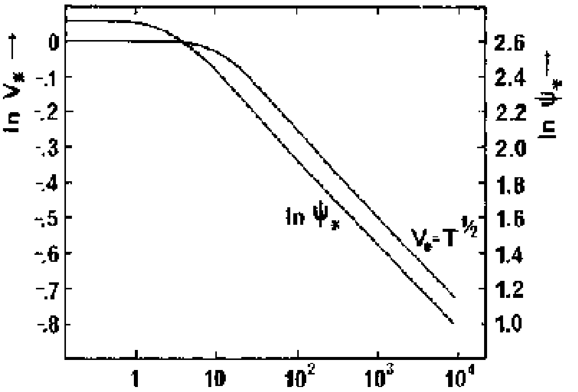
となる。

実際に $r_0(t)$ とかを求めるには、やはり固有値問題をとくことになる。Lynden-Bell & Eggleton は実際にといて、

$$\rho = r^{-2.21}. \tag{10.35}$$

という答を得た。以下に、彼らの求めた固有関数を示す。





10.2.1 ガスと N 体の違い

実は、このあたりの進化、すなわち重力熱力学的不安定や自己相似解については、ガス近似、FP 計算、N 体の間の一致は素晴らしくよい。ガスではうまく表現出来なくなるのは、質量分布がある場合、非等方性が発達する場合等である。

10.3 自己相似解の後の進化

さて、自己相似解は、ある時刻 t_0 で密度が無限大になる。これを collapse と呼んでいる。実際にそんなことが起きるのか、また、そのあとはどうなるのかというのは現実的には重要な問題である。というのは、多くの球状星団、あるいは dwarf E では、タイムスケールを見積もるとすでに collapse しているはずだからである。

その後どうなるかについては、いろんな可能性が考えられた。特に、これによってブラックホールを作るというアイディアはそれなりに真剣に検討された。

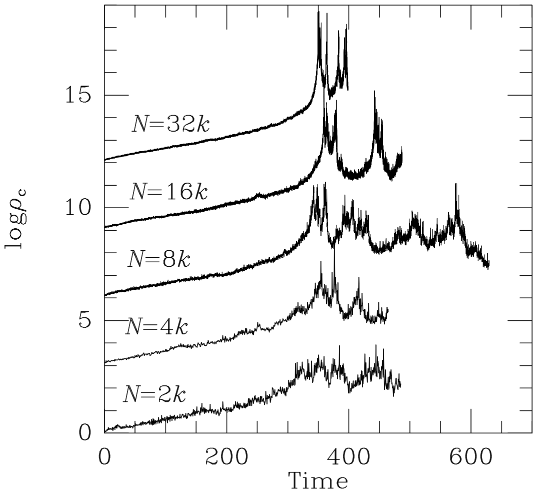
現在のところ、典型的な球状星団とか dwarf E では、ブラックホールが出来るというのはありそうにない。コアが十分に小さくなると、エネルギー供給源が出来るからである。

ここでのエネルギー供給の元は連星である。仮に星団があらかじめ連星をもっていなかったとしても、コアが十分に小さくなると、そのなかで 3 体相互作用で連星ができるようになる。これは基本的には星のなかで温度、密度が上がると核融合が始まるというのと変わるところはない。ただし、量子力学的な効果はないので、連星の出来やすさは密度と温度（平均速度）の関係だけで決まる。

連星によるエネルギー供給が入ると、コアの収縮は止まる。熱源として連星を考えた計算を始めて行なったのは Henon (1975) であり、1982 年ころまでにいくつかそのような計算が行なわれた。それらでは、コアからの熱伝導による熱の流出と連星からのエネルギー入力がバランスし、系全体がホモロガスな膨張をするという結果が得られていた。特に、Goodman (1984) は実際にそのようなホモロガスな解を求めた。

しかし、1983 年になって、Sugimoto & Bettwieser は、実はこのホモロガスな膨張解も熱力学的に不安定であるという発見をした。そのあと数年に渡る論争があったが、1985 年には他のグループ

によるガスモデル計算、1986 年には FP 計算でも振動が確認された。実際に粒子系でそんなものが起きるかどうかにはさらに議論があったが、1995 年になって N 体数値計算でも確かに振動が起きるということが見い出された。



第11章　その他の話題

というわけで、この講義も最終回である。予定では

- 自己重力多体系におけるカオス
- 外場の影響

というようなことをすることになっていたが、どちらもわりと面倒な話で、ちょっと簡単には終らない。また、「本当かどうか（結果が信用できるか）」についてもまだ議論があるような話が多い。参考文献だけ紹介しておく。

11.1　自己重力多体系におけるカオス

Goodman, J., Heggie, D. C. and Hut, P., *On the Exponential Instability of N-Body Systems* , APJ 1994, 415, 715.

Fukushige, T., Makino, J., Nishimura, O. and Ebisuzaki, T., *Smoothing of the Anisotropy of the Cosmic Background Radiation by Multiple Gravitational Scattering* , PASJ, 1995, 47, 493-508.

Funato, Y., Makino, J., and Ebisuzaki, T., *Attenuation of luminosity of distant galaxies by multiple gravitational lensing* , APJL, 1994, 424, L17–20.

11.2　外場の影響

Chernoff, D. F. and Weinberg, M. D., *Evolution of globular clusters in the Galaxy* , APJ, 1990, 351, 121–156.

Fukushige, T., Heggie, D. C., *Pre-collapse evolution of galactic globular clusters* , MNRAS, 1995, 276, 206–218.

11.3　数値計算法

これだけでおわりにしては何なので、少し役に立つ（かもしれない）話をしておく。

ここまで、自己重力多体系での物理過程の話をしてきたわけだが、では、いったいそういった系をどうやって研究するかという話になる。球対称な系とか、いろいろ仮定をおいていい場合には、無衝突系の場合には無衝突ボルツマン方程式を直接数値積分するというような方法もあり得る。また、衝突系の場合には orbit-averaged Fokker-Planck 方程式を数値計算するということも考えられる。

しかし、次元を落した系でなければ、上のような方法は現実的ではない。計算に必要なメモリ量や

計算時間があまりに莫大なものになるからである。このため、どちらの場合でも、実際に多粒子系の数値計算を直接行なうという方法がとられてきた。

11.4　解くべき問題

解くべき問題は重力多体問題、つまり重力で相互作用する質点系がどのようにふるまうかという問題である。

系の進化を表す方程式は

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -\sum_{j\neq i} Gm_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \qquad (11.1)$$

つまり、単にある粒子はほかのすべての粒子からの重力を受けるというそれだけである。

11.5　解く方法

解くべき常微分方程式系は式 11.1 で与えられるので、初期条件を作ればあとは各粒子の位置からそれぞれへの重力を計算するサブルーチンを書き、それを適当な数値計算ライブラリに渡して数値積分すればそれでおしまいと行けば話は簡単だが、それでは今日わざわざこの講義をする必要はない。そううまく行かないのには 2 つの理由がある。

第一の理由は、ナイーブな方法では 1 ステップ当たりの計算量が粒子数の 2 乗に比例して増えてしまうということである。もちろんもっとうまい方法がなければしょうがないが、残念なことに計算量を $O(N^2)$ から $O(N\log N)$ ないしは $O(N)$ に落とす方法が知られている。これらの原理は、基本的には遠くの粒子からの力は適当にまとめるということである。

もう一つの理由は、すべての粒子を同じ時間刻みで積分すると、ステップ数が非常に大きくなってしまうということである。例えばたくさんの微惑星が太陽のまわりをまわっているという計算をしたとする。ほとんどの粒子に対しては、太陽からの重力が圧倒的であり、また軌道は円軌道に近い。従って、例えば一周期を 100 ステップとかそれくらいで刻んでやれば十分正確に軌道を追いかけることができる。しかし、いくつかの微惑星は他の微惑星と近接遭遇をしているかもしれない。するとこの近接遭遇をちゃんと計算するためには時間刻みを短くする必要がある。このときに、すべての粒子の軌道を同じ時間刻みで積分していると、別に近接遭遇中でもなんでもない粒子もすべて短い時間刻みで計算されることになり、ステップ数が非常に大きくなる。この問題は、粒子毎にバラバラな時間刻みを与え、必要に応じてそれらを独立に変化させることができれば解決できる。

なお、第二の問題、すなわち近接遭遇の問題には、別の対応もある。それは、相互作用のポテンシャルを変えて、近接遭遇が起きても時間刻みを短くしなくてもいいようにすることである。具体的には、ふつうの重力ポテンシャルは$-Gm/r$ で与えられるが、これを例えば$-Gm/\sqrt{r^2+\epsilon^2}$といった形にしてしまう。このようにすれば、$\epsilon$より小さいところでは重力が大きくならないので、粒子の典型的な速度を v とすれば時間刻みをϵ/v にくらべて十分小さく取っておけばいい。これをソフトニングという。

ソフトニングをしていいかどうかは問題による。例えば微惑星の計算では、近接遭遇で軌道が変化する、あるいは物理的に衝突して合体するといった過程を計算したいので、ソフトニングをしたのではなんだかわからなくなってしまう。これにたいして銀河のシミュレーションとかいった場合には、近接遭遇で軌道が変化するといった効果は非常に小さく、ソフトニングが有効となる。

11.6 第一の問題への対策

銀河、銀河団のシミュレーションでは、ソフトニングが使えるためにタイムスケールの問題は無い。このために微惑星とか球状星団にくらべれば話は簡単であり、第一の問題、すなわち計算量が粒子数の2乗に比例して増えるという問題だけ考えればいい。

とはいえ、これは大きな問題である。例えば普通の渦巻銀河を、2体緩和によって壊れてしまわないように表現するためには少なくとも10^5個程度の粒子が必要である。このような銀河1000個から銀河団を作れば粒子数は1億個となり、1ステップ計算するのに10^{17}演算程度が必要になる。これは例えば100 Gflopsの超並列計算機で10日程度であり、1万ステップ計算するのに300年かかってしまう。

もう少し速く計算するためにひろく使われているのがBarnes-Hutアルゴリズムあるいはツリーコードと呼ばれる方法である。原理は簡単で、遠くのほうの粒子はグループにまとめ、グループからの力は多重極展開（といっても普通に使うのはせいぜい1次または2次、1次の展開は要するに重心で置き換えること）で計算する。

グループ分けは粒子毎に作っていてはしょうがないので、空間を階層的な立方体からなるツリー構造に組織してあらかじめすべての階層で多重極展開を計算しておく。ある粒子へのある立方体からの力は、それらが「十分に離れて」いれば多重極展開を計算して得られる。そうでなければ下の階層に再帰的に降りていって、十分離れているとみなせるところまでいって計算する。系全体からの力も、単に系全体に対応する立方体からの力を計算することで求められる。

この方法では計算量が$O(N^2)$から$(ON \log N)$になる。もう少し（原理的には）賢い方法として、$O(N)$になるアルゴリズムが知られている。この方法では、力を及ぼすほうだけでなく受ける方もまとめて計算する。つまり、力を及ぼすほうの回りで有効なポテンシャルの多重極展開を、受ける方の中心でのテイラー展開に変換し、そのテイラー展開を各粒子の位置で計算することで力が求められる。

11.6.1 計算量の減少と計算効率の減少

$O(N \log N)$の計算法は天文シミュレーションでは広く使われている。またパイプライン型ベクタプロセッサや並列計算機での実行もかなりよく研究されている。これに対し$O(N)$のアルゴリズム(Fast Multipole Method, FMM)はまだ天文の問題に使えるような実用的な実装（実際に走るプログラム）を作った人がいないので、以下ツリーコードについてその実装上の問題点を簡単にまとめる。

ツリーコードでどのような問題が発生するかを考えるためには、比較の対象として$O(N^2)$の直接計算アルゴリズムを考えることが有用である。これは、ベクタプロセッサでは非常に高い効率で走る。またほとんどいかなる並列計算機でも、マシンの理論ピークに近い性能を出すことができる。

もっともピーク性能を出すのが困難であると考えられる分散メモリMIMD型の時にどのような計算法を使えるかを簡単に説明すると以下のようになる。

まず各プロセッサに（大体）同じ数の粒子を割り当てる。自分ので持っている粒子同士の相互作用はそのまま計算すればいい。それ以外の他のところとの総誤差用は、プロセッサを1次元的なリングとみなして、粒子をたらい回しにして順次計算することができる。また、あるプロセッサのデータを全プロセッサに効率良く放送できる場合にはその機能を使ったほうがプログラムが容易である。

計算速度に対し必要な通信速度は、プロセッサ数をpとしてオーダとしてはp/Nになるので、$p << N$

(普通成り立つ)では通信速度は問題にならない。共有メモリならば話はもっと簡単になる。

さて、ツリーコードの場合、演算量は減るが計算速度(1秒に何回浮動小数点演算をするかという意味での)は、普通のスカラープロセッサでも低下する。これは、ある粒子への力を計算する時の配列のアクセスの仕方が不規則であり、キャッシュミスの確率が高いことが大きな理由である。また、そもそも分岐自体が多いことも性能低化の理由となる。

ベクタプロセッサではより困難な問題、すなわち再帰呼び出しがあるようなループはベクトル処理できないという問題が発生する。これは87年頃にいくつかのアプローチによって解決された。(詳細は省く)

これらのアプローチは、アルゴリズムの変更による計算量の増大またはメモリアクセスの不連続性による計算速度の低下というペナルティを持つものの、もっとましな方法は知られていないということもあり現在も広く使われている。

共有メモリMIMD型の並列計算機の場合、再帰呼び出しも並列化可能で特に問題なく実行可能となる。ただし、分散共有メモリ(仮想共有メモリ)の場合、物理的には分散メモリなので後に述べる分散メモリのマシンと同じ配慮が必要になる。

分散メモリでツリーコードを実行する方法については、Caltechのグループは87年頃からいくつかの方法を試み、まあまあの結果を得ている。基本的なアイディアは、粒子を空間的に近いグループに分けるということである。分けるのには、それ自体にツリーによる空間分割を利用する方法や、適当に空間を半分に切っていく方法などが知られている。

11.7 第二の問題への対策

11.7.1 独立時間刻み

第二の問題、すなわちタイムスケールの問題には、粒子毎に別々の時間刻みを与えることで対応することになる。この場合、時間積分は「次の時刻」すなわち現在の時刻と時間刻みの和がもっとも短い粒子を選び、それの軌道を積分してその時刻と時間刻みを改めて計算し、最初に戻って次の粒子を選ぶという具合にすすむことになる。

この方法の場合、ベクタプロセッサでの実行は容易である。というのは、ベクトルの総和というのはすべての現存のベクタプロセッサで効率良く実行できる処理であるからである。

並列計算機の場合、一旦各プロセッサで自分の分を計算し、その総和をとってから軌道積分に進むということになる。これは$p << N$であれば不可能ではないが、時間刻み共通の場合に比べて難しい。これは、一回の通信でのデータ転送量が小さいため、ピーク転送速度ではなくメッセージレイテンシ(最初のデータを送り出してからつくまでの時間)が問題になるからである。実際に、必ずしも高い性能が得られないことがわかっている。

11.7.2 2重時間刻み

「独立時間刻み」法の改良として、「独立2重時間刻み」あるいはneighbor schemeといわれる方法がある。これは、ある粒子への力をその回りの粒子からの分と遠くからの分に分割し、遠くからの分は長い時間刻みで積分するという方法である。理論的には、単純な方法に比べた時の計算量の減

少が $N^{1/4}$ に比例するということになっている。

この方法の並列化は困難である。近くの粒子からの力の計算ではメモリアクセスが不規則でしかもループ長が短くなるので、ベクタプロセッサでも効率が大きく低下することが知られている。

11.7.3 ブロック時間刻み

並列計算機上で効率をあげるには、一度に1つの粒子しか動かさないのではなく、なるべくたくさんの粒子を並列に積分できることが望ましい。これは時間刻みを2のベキ乗に離散化することで可能になる。このようにすれば、ある粒子が積分される時にそれと同じかあるいは短い時間刻みを持つ粒子は並列に積分して良く、並列度は劇的に向上できる(理論的には $N^{2/3}$ と見積もられている)。現在までの分散メモリ型並列計算機への独立時間刻み法の実装は、すべてこの方法(ブロック時間刻み)によっている。

11.8 数値積分法

ここまでは、「相互作用をいつ、どうやって計算するか」という話をしてきた。しかし、実際に数値解を求めるには求まった重力加速度を使って各粒子の軌道を積分する必要がある。以下、その方法について簡単に述べる。

11.8.1 The Euler method

これは知らない人はいないと思いたいが、ある微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,t) && (11.2)\\ x(0) &= x_0 && (11.3) \end{aligned}$$

があるときに、時刻 $t+\Delta t$ での近似解 x_{i+1} を、時刻 t での近似解 x_iを使って

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t) \qquad (11.4)$$

とする方法である。局所打ち切り誤差は $O(\Delta t^2)$ であり、したがって大域誤差は $O(\Delta t)$ ということになる。プログラミングは簡単であるが、誤差があまりに大きくほとんど実用にはならない。

11.8.2 The leapfrog method

これはセパラブルなハミルトン系、すなわちハミルトニアンが運動量の関数と位置の関数に分かれるものに対する特別な方法である。通常の、運動量に対するハミルトニアンが2次形式である場合には、

$$\begin{aligned} v_{i+1/2} &= v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i) && (11.5)\\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t v_{i+1/2} && (11.6) \end{aligned}$$

と書くのが普通である。これでは速度と位置がずれた時間でしか定義されないが、出発用公式として

$$v_{1/2} = v + \Delta t a(x_0)/2 \qquad (11.7)$$

を使い、さらに終了用公式として

$$v_i = v_{i-1/2} + \Delta t a(x_i)/2 \tag{11.8}$$

を使うことで最初と最後を合わせることが出来る。この形は、実は

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 a(x_i)/2 \qquad (11.9)\\ v_{i+1} &= v_i + \Delta t[a(x_i) + a(x_{i+1})]/2 \qquad (11.10)\end{aligned}$$

と数学的に等価である (証明してみること) また、以下のようにも書ける

$$\begin{aligned} v_{i+1/2} &= v_i + \Delta t a(x_i)/2 \qquad (11.11)\\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t v_{i+1/2} + \Delta t^2 a(x_i)/2 \qquad (11.12)\\ v_{i+1} &= v_{i+1/2} + \Delta t a(x_{i+1})/2 \qquad (11.13)\end{aligned}$$

さらにまた、速度を消去して x_{i-1}, x_i, x_{i+1} の関係式の形でかいてあることもあるかもしれない。なお、すべて違う名前がついていたりするが、結果は丸め誤差を別にすれば完全に同じである。

この公式は局所誤差が $O(\Delta t^3)$、大域誤差が $O(\Delta t^2)$ である。

さて、局所誤差という観点からはこれは決して良い公式というわけではないが、現実には特に無衝突系の計算ではこの公式は非常に広く使われている。衝突系の計算で、独立時間刻みを使うような場合にはこの方法は使われないが、それ以外の非常に多くの問題はこの方法で解かれているといってよい。

これは、別にもっとよい方法を知らないからとかではなく、実はこの方法がいくつかの意味で非常に良い方法であるからである。いくつかの意味とは、例えば力学平衡の系でエネルギーや角運動量が非常によく保存するということである。これらの保存量については多くの場合に誤差がある程度以上増えない。

この、ある程度以上誤差が増えないというのは目覚しい性質である。通常の方法では、エネルギーの誤差は時間に比例して増えていく。従って、長時間計算をしようとすればそれだけ正確な計算をする必要がある。ところが、エネルギーの誤差は溜っていかないのならば、かならずしも精度を上げる必要はないとも考えられる。

もちろん、エネルギーが保存していればそれだけで計算が正しいということにはならない。が、理論的には、いくつかの重要な結果が得られている。まず、

1. leapfrog は symplectic method のもっとも簡単なものの一つである。
2. leapfrog は symmetric method のもっとも簡単なものの一つである。

Symplectic method については、以下のようなことが知られている

1. symplectic method は、すくなくともある種のハミルトニアンに対して使った場合に、それに近い別のハミルトン系に対する厳密解を与えることがある。
2. 周期解を持つハミルトン系に対して使った場合に、どんな量でも誤差が最悪で時間に比例してしか増えない。
3. 時間刻を変えると上のようなことは成り立たなくなる

これに対し、 symmetric method については以下のようなことが知られている

1. 周期解を持つ時間対称な系に対して使った場合に、どんな量でも誤差が最悪で時間に比例してしか増えない。
2. 時間刻を変えてもうまくいくようにすることも出来る。

というわけで、leap frog が、それよりも局所的には誤差が小さいルンゲ・クッタとかに比べて良い結果を与えるのは当然のことである。

11.8.3 The Aarseth method

さて、独立時間刻みを使った場合には、話はそう簡単にはいかない。というのは、symplectic method の良い点も symmetric method の良い点も失われるからである。このため、通常はより高次の方法が用いられる。まあ、cosmological な計算なんかでは独立時間刻みで 2 次の公式を使っている例もないわけではないが、結果を信用できるかどうかには注意したほうがよいかもしれない。

高次の方法としては、伝統的には Aarseth が 60 年代に開発した方法が用いられてきた。これは、いわゆる線形多段法 linear multistep method に基づくものである。具体的な実現についてはここでは省くが、基本的に、過去数ステップの加速度から補外多項式を作り、それを積分して位置と速度を更新する。独立時間刻みを使うに当たっては、他の粒子の位置は補外多項式で計算する。

11.8.4 The Hermite method

Aarseth method は広く使われてきたが、結構面倒であるし高次にしていくと計算量が増え、また安定性が急激に悪くなる。もう少し簡単な方法はないかということで考えられたのが Hermite method である。これでは、加速度の他にその時間導関数まで直接計算し、それから補外、補間多項式を作る。これは最近かなり広く使われるようになってきた。

11.9 レポート課題

以下のどれでも OK。

1) これまでに出た問題のなかから、適当に何か解いてレポートにせよ。
2) これまでに紹介された論文（どれでも OK）のなかから、どれかを読んで内容を要約し、それが正しいかどうかについて議論せよ。
3) 自分の研究対象について、その振舞いに「自己重力性」が重要な振舞いを果たすかどうかについて議論せよ。