

自己重力系の力学

牧野淳一郎

国立天文台理論研究部/天文シミュレーションプロジェクト

平成 19 年 8 月 2 日

事務連絡：

レポート課題

1. 等温モデルの微分方程式 (1-35) を $r = 0$ で $\rho = 1, \frac{d\rho}{dr} = 0$ の条件で外側に向かって適当な方法で数値的に解き、解を両対数でグラフにしてみよ。また、 r が十分大きい時に $\rho \propto r^{-2}$ となっていることを確認せよ。
2. バックグラウンドが熱平衡の時の速度変化の1次の項 (2-12) 式を、(2-7) 式の速度分布にマックスウェル分布を入れることで求めよ。また、この項が $x \rightarrow 0$ の極限で x に比例することを示せ。
3. この講義を聞いた感想、教員への希望等を A4 レポート用紙 1 枚程度 (1000 字程度) にまとめよ。

まあ、最低1つ、できれば2つ以上選んで、以下のアドレスにメールで提出すること。

makino -at- cfca.jp

MS-Word のファイルで送ってくれるとこちらで読むのが面倒なので、これは避けて欲しい。普通のメールの文章、LaTeX、HTML、PDF はOK。

✂切は 8/17 とする。

衝突系

ここまでの話:粒子数無限大

実際の系、数値実験:粒子数小さい

(大抵は数値実験では実際より小さい)

この場合、「衝突項」 $\partial f / \partial t|_{\text{coll}}$ の効果が無視できない。以下、その話。

基本的に衝突項は「2体散乱」の効果(多体の効果は無視できる)、つまりいわゆる2体緩和を考えればいい(らしい)。

2 体緩和

2 体緩和とはなにか？

原理的には結構厄介な問題

有限粒子数の自己重力多体系の進化

最初は力学平衡にない → まず力学平衡に

有限粒子数: 真の力学平衡というものはない。

有限の質量をもった各粒子が系の中を運動するに従って、ポテンシャルが必ず変化する。この変化によって各粒子の軌道も変化することになる。

効果の分離

粒子の軌道の変化を、粒子数が有限であることから来る成分とそれ以外に分離することは可能？

系が力学平衡にあるとみなすことができればそれは可能。

力学平衡にあれば、粒子のエネルギー変化は定義によりすべて粒子数が有限であることによる。

が、良く考えると問題なのは、そもそも有限粒子数であるものを力学平衡とみなすとはどういうことかということである。このあたりを考えていると段々混乱してくるので、まず、理想化された状況から考えていくことにする。

理想化：一様等方な分布

例えばマックスウェル分布があって、その中の一つの粒子をとって考えるということをしたいわけだが、これも結構厄介なのでさらに簡単な例を考える。

速度0で空間内に一様（ランダム）に分布した質点を考え、その中を質量0のテスト粒子を飛ばして見る。

この場合エネルギー交換はないので速度は変わらず、単に散乱されるだけ

しかし、この例は2体緩和のいくつかの重要な性質を示すのですこし詳しく見ていくことにする。

もっとも簡単な例

分布している質点の質量を m 、数密度を n とする。テスト粒子が一つの粒子から距離（インパクトパラメータ） b を速度 v で通った時に曲がる角度は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{2b}{(b/b_0)^2 - 1} \\ b_0 &= \frac{Gm}{v^2}\end{aligned}\tag{1}$$

で与えられる。単位時間当たり、インパクトパラメータが $(b, b+db)$ の範囲にある散乱の回数は $2\pi n v b db$ である。

角度の変化

散乱の方向はランダム

従って平均としては（一次の項は）0になる。

しかし、2次の項は0にならない。これは単位時間当り

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle = 2\pi n v \int_0^{b_{max}} \delta\theta^2 b db \quad (2)$$

で与えられることになる。

この式から既にいろいろな性質がわかる。が、その前に理論的な困難を解決しておく必要がある。

この積分は $b \rightarrow \infty$ で発散している。

発散の解消

初めて2体緩和の性質を理論的に調べた Chandrasekhar は、以下のように考えた。

「平均粒子間距離よりもインパクトパラメータが大きいような散乱は、多体の干渉によって効かなくなるのでそこで積分を打ち切ってよい」

多体の干渉なんて本当にあるか？

もっと素直な解釈:実際に系にあるすべての粒子と常に同時に相互作用しているのだから、システムサイズくらいまで全部入れる(系が構造を持つ場合はちょっとややこしいが、密度の空間依存も積分のなかに入れて全空間で積分する)

積分の上限

数値実験の結果などから、後者の解釈すなわち全体が効くというほうが正しいということはかなり昔から大体わかっていた。歴史的には、どちらの解釈が正しいかについてはかなり最近まで論争があって、完全に決着がついたといえるのは 94-5 年頃である。

まあ、現在では後者の解釈が正しいということに疑いの余地はない。

緩和時間

前の式から、適当に近似すると

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle \sim Gnv^{-3}m^2 \log(R/r_0) \quad (3)$$

R は先に述べたシステムの大きさ、 r_0 は「大きく曲がる」ためのインパクトパラメータの値で、 $b_0 = GM/v^2$ の程度。

角度変化が1の程度になる時間というのを求めてみると、

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \quad (4)$$

となる。ここで Λ は上の R/r_0 を単に書き換えただけである。

今、 $\log \Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の3乗、数密度の逆数、質量の2乗の逆数に比例するということがわかったことになる。

多体系の緩和時間

前の式から、特に、質量密度一定の場合というものを考えてみると、タイムスケールが各粒子の質量に比例するということがわかる。

ある大きさを持った多体系というものを考えてみよう。質量 M 、特徴的な半径（ビリアル半径か何か） R 、粒子数 N とすれば、ビリアル定理から $v^2/2 = GM/R$ 、力学的なタイムスケールが $t_d \sim \sqrt{R^3/GM}$ となる。これを使うと上の緩和のタイムスケールは

$$t_\theta \sim \frac{N}{\log N} t_d \quad (5)$$

となる。粒子数が大きいほど無衝突系に近づくのだから、まあ、当然の結果といえなくもない。

流体との違い

ガス:粒子の平均自由行程はシステムサイズよりもはるかに小さい

従って、平均自由行程がシステムサイズより小さく、システムサイズよりは小さく平均自由行程よりは大きいような空間スケールを考えると、そのなかでほぼ熱平衡になっていると断言していいことになる。つまりいわゆる Local thermal equilibrium (LTE) の仮定が使える。

こうなると、温度とか圧力とかいった量が近似的(といっても実際上非常に高い近似精度で)に定義でき、そういったマクロな量で系の進化を扱う、特に熱の流れを拡散方程式で書くといったことが可能になる。

自己重力系の状況

自己重力質点系では状況が全くことなる。

粒子数が無限大の極限:平均自由行程も無限大

LTE がなりたたないどころか、そもそも熱平衡に向かう(すなわちエントロピーを生成する)ようなメカニズムがない。

粒子数が有限の場合も、依然として平均自由行程は長い

粒子数無限大の時の軌道からずれる典型的なタイムスケールは $Nt_d / \log N$ 程度。

流体の場合とは全く逆に、ほとんど自由運動(というか、他の粒子全体が作るポテンシャルに沿った運動)をしていて、その場が有限の粒子で表現されるための揺らぎがあるので段々軌道が変わっていくということ。

緩和の意味の違い

自己重力系:

ローカルな熱平衡を仮定して拡散係数 / 輸送係数を求めると
いうのとは逆

ある一つの粒子が系の中を動き回りながらどういうふうにエ
ネルギー等を変化させていくかという観点

すこし別ないい方をすれば:

通常 of 空間のなかでの密度や温度の変化を考える代わりに、6
次元位相空間のなかでの分布関数の進化を考えるということ
に当たる。

バックグラウンドが速度分布をもつ時

この計算を始めるといくらでも時間をつぶせていいんだけど、ちょっと細かい話になりすぎるので概念と結果だけ。

バックグラウンドが速度分布を持つ場合

$$h(\mathbf{v}) = \int \frac{f(\mathbf{v}_f)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_f|} d\mathbf{v}_f \quad (6)$$

なる関数 $h(\mathbf{v})$ を導入して、一次の項は

$$\langle \Delta v_i \rangle = -\Gamma(1 + m/m_f) \frac{\partial h}{\partial v_i} \quad (7)$$

2次の項は

$$g(\mathbf{v}) = \int f(\mathbf{v}_f) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_f| d\mathbf{v}_f \quad (8)$$

とおけば、

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle = \Gamma \frac{\partial^2 g}{\partial v_i \partial v_j} \quad (9)$$

ここで Γ は

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln \Lambda \quad (10)$$

である。

バックグラウンド速度分布が熱平衡の場合

速度分布を熱平衡、すなわち

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{n_f}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \quad (11)$$

とすると、

$$\langle \Delta v_{\text{平行}} \rangle = -4 \frac{n_f \Gamma}{\sigma^2} \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) G(x) \quad (12)$$

$$\langle \Delta v_{\text{平行}}^2 \rangle = 2\sqrt{2} \frac{n_f \Gamma}{\sigma} G(x) / x \quad (13)$$

$$\langle \Delta v_{\text{垂直}}^2 \rangle = 2\sqrt{2} \frac{n_f \Gamma \operatorname{erf}(x) - G(x)}{\sigma x} \quad (14)$$

$$\langle \Delta E \rangle = \sqrt{2} \frac{n_f \Gamma}{\sigma} \left[-\frac{m}{m_f} \operatorname{erf}(x) + \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) x \operatorname{erf}'(x) \right] \quad (15)$$

ここで erf は誤差関数であり、

$$G(x) = \frac{\operatorname{erf}(x) - x\operatorname{erf}'(x)}{2x^2} \quad (16)$$

また $x = v_t/(\sqrt{2}\sigma)$ である。

式の意味

まず、速度の1次の項を見てみる。

$$\langle \Delta v_{\text{平行}} \rangle = -4 \frac{n_f \Gamma}{\sigma^2} \left(1 + \frac{m}{m_f} \right) G(x) \quad (17)$$

$$G(x) = \frac{\text{erf}(x) - x \text{erf}'(x)}{2x^2} \quad (18)$$

$$x = v_t / (\sqrt{2}\sigma)$$

タイムスケールを考えてみると、速度が大きい極限では減速のタイムスケールが v^3 であるのに対し、逆の極限では一定になる

速度が小さいほうではタイムスケールがある一定値、つまりは $v \sim \sigma$ で決まる値あたりになる。

Dynamical Friction

1次の項は、前に述べたように dynamical friction を表している。

恒星系が質量の違う2つの成分から出来ているような場合：
力学平衡で、分布関数に質量依存がないようなものを考えると、これは熱平衡から遠くはなれている。従って、上の式で決まるタイムスケールで重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得る。

2次の項

次に、2次の項を見てみる。

$$\langle \Delta v_{\text{平行}}^2 \rangle = 2\sqrt{2} \frac{n_f \Gamma}{\sigma} G(x) / x \quad (19)$$

$$\langle \Delta v_{\text{垂直}}^2 \rangle = 2\sqrt{2} \frac{n_f \Gamma}{\sigma} \frac{\text{erf}(x) - G(x)}{x} \quad (20)$$

$$(21)$$

速度に平行な成分も垂直な成分も、 v が大きい極限では0にいく。これに対し、速度が0の極限では、どちらも一定値に収束する。これは停止している極限でも、回りの粒子によって揺さぶられるということを表している。

熱平衡とその安定性

ここまでで、一応素過程の話をしたことにしたので、改めて熱力学に戻る。

熱平衡状態の非存在

重力多体系に統計力学 / 熱力学を適用する際の基本的な問題：

「重力多体系には熱平衡状態がない」ということ

「熱平衡状態がない」というのはそもそもどういうことか？

示し方はいろいろ、、、 以下は1例

熱平衡状態の非存在(続き)

古典統計である

したがって、速度分布関数はマックスウェル・ボルツマンでなければならない

これは不可能

自己重力系にある粒子のエネルギーは、定義からして無限遠での重力ポテンシャルの値を超えない

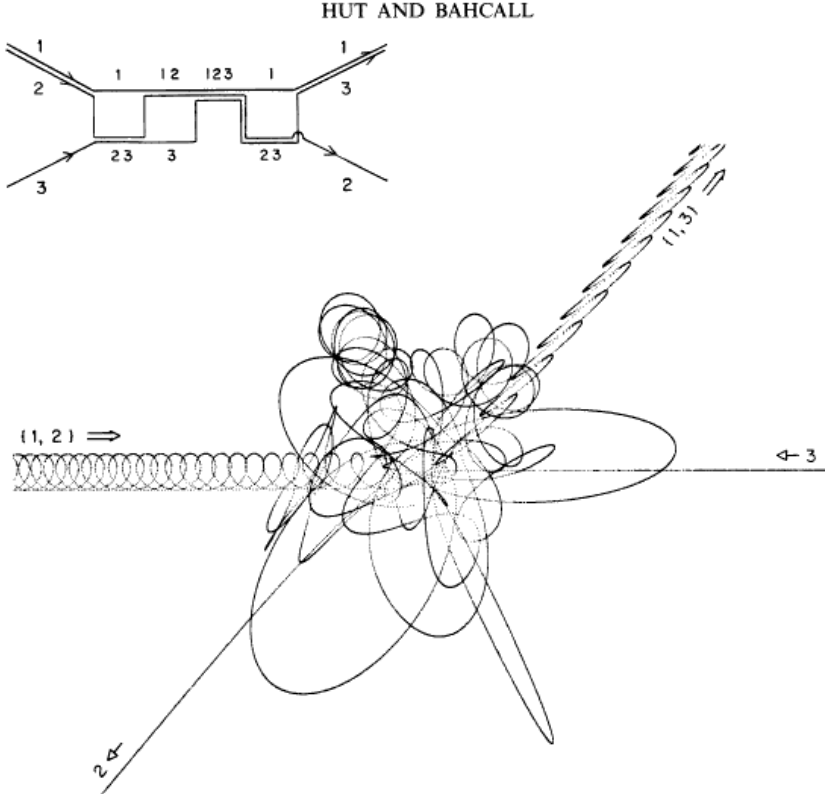
したがって、ある空間のある点での速度分布には必ず上限がある。

言い換えると、上限を超えた粒子は逃げていってしまう、、、

例 — 重力3体問題

2体問題では周期解になるだけで何も起きないので、3体問題。

重力3体問題の解の一例



重力3体問題(2)

全系のエネルギーが負で、全体としては自己重力で集まっている適当な初期条件（前の例では2つは連星というちょっと特別な例）から運動させる

しばらくは3つがそれぞれお互いの回りを運動する

そのうちに、粒子のうちの2つが強く結合した状態になり3つめがその反作用ではね飛ばされるという現象が起きる。

3体問題としては、これが「最終状態」

重力多体系の最終状態

粒子数が多い系でも、本質的には同じことが起きる。

つまり、粒子同士の散乱の結果、高エネルギーの粒子が作られるとそれは系から逃げていってしまうのである。

というわけで、統計力学からいえること：

重力多体系は、十分長い時間が立てば蒸発してしまう

しかし、これは間違いではないけど、でも、現実に存在している重力多体系の理解には役に立たない。

それでも、熱平衡状態について

まあ、それでも、やっぱり、熱平衡というものを考えたい

- いきなり非平衡とかいわれてもわけがわからない
- ある種の重力多体系では、熱平衡からそんなに遠くない状態が実現されている

というわけで、熱平衡状態がどういうものかを理解しておくことは極めて重要。

とはいえ、厳密には熱平衡はない。

熱平衡状態を作る

問題：どうやって、「本質」を失わないで熱平衡がある系に持っていけるか？

- 空間の次元を落とす。
空間1次元にすると、熱平衡がある。(粒子間ポテンシャルが無限大で発散するので)
- 空間は3次元のまま、エネルギー無限大でも逃げないようにする(壁をつける)

どちらもいろいろな人がいろいろなことをしている。

熱平衡状態を作る (2)

1次元系の話はいろいろ面白いが、今日は省略。興味がある人は、

Tsuchiya, Konishi and Gouda, PR, E50, 1996, 2210
などを見ること。

今日1次元系の話をしないのは、結局1次元系では3次元系で起きるいろいろな重要な物理が失われるから。

壁をつけるのは、「熱平衡がある」という他はあまり大きく現実と変わらないので、以下こっちの話。で、さらに話を簡単にするために壁は球対称とする。

熱平衡分布の熱力学的安定性

以下、熱平衡分布が安定かどうかを考える。

で、とりあえず流体の場合を考える。流体だと普通に温度や圧力、エントロピーとか考えられて、熱力学的な取り扱いができるから。

何に対して安定か：熱（エネルギー）の再分配を与えるような摂動に対して。

普通の統計力学では、平衡状態は安定に決まっている。

どこかから熱をとって、別のところに与える → とられたところは温度が下がり、もらったところは温度が上がる → とられたところには回りから熱が流れ込む、もらったところは流し出す → 等温に戻る。

自己重力系の熱力学的安定性

重力が働くと、そうとは限らない：

断熱壁の中の等温平衡状態：中心では重力をささえるために
密度が高い。外側にいくほど密度が下がる。



熱を奪われると、圧力が下がって少し収縮する



重力が強くなるので、もうちょっと収縮する



回りより温度が上がる

ということが起こり得る。

熱力学的安定性（続き）

熱をとられて温度が下がる
＝「見かけの」比熱が負である

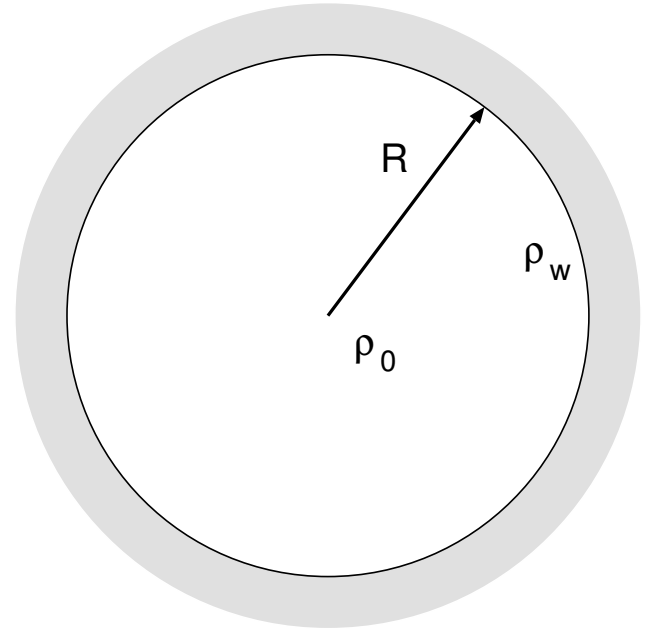
以下、線形安定性解析の結果を
見ていくことにする。

改めて、絵を書きしておく。

半径 R の中に質量 M のガスがあり、中心密度 ρ_0 と壁の
ところでの密度 ρ_w の比が D であるとする。

$D = 1$: 重力なし（温度無限大）

$D = \infty$: 特異解 $\rho \propto r^{-2}$



熱力学的安定性（続き2）

熱力学的安定性の解析方法はいろいろ：

- Linear series analysis (Chandrasekhar, Lynden-Bell and Wood 1968) : D を変えた時のエネルギーの変化を見る。極小値があれば、そこから先は熱力学的に不安定。
- 摂動を与えて、適当な制約のもとでエントロピーの2次の変分を見る (Hachisu and Sugimoto 1978)
- 摂動を与えて、その時間発展を見る (普通の線形解析, Makino and Hut 1991)

以下、3番目の方法に沿って話す。

定式化

熱伝導の式：

$$K \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{L}{4\pi r^2} \quad (22)$$

$L(r)$ ：半径 r のところでの熱流束

K ：熱伝導の係数

仮定：

$$K = \rho^\alpha \quad (23)$$

ここで、一応重力多体系に似せる： $\alpha = 1$

エントロピーの式など

エントロピーについての式：

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi r^2 \rho T \frac{\partial s}{\partial t} \Big|_M. \quad (24)$$

境界条件：

$$L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \quad \text{and} \quad M = 1. \quad (25)$$

線形化した方程式

微小な摂動に δ をつけることにして、線形化した方程式は

$$\frac{d\delta \ln p}{dM} = \frac{M}{4\pi p r^4} (\delta \ln p + 4\delta \ln r), \quad (26)$$

$$\frac{d\delta \ln r}{dM} = -\frac{1}{4\pi r^3 \rho} (3\delta \ln r + \delta \ln \rho), \quad (27)$$

$$\delta \ln p = \delta \ln \rho + \delta \ln T, \quad (28)$$

$$\delta s = \frac{3}{2} \delta \ln T - \delta \ln \rho, \quad (29)$$

$$(30)$$

境界条件は

$$3\delta \ln r + \delta \ln \rho = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \quad (31)$$

$$\delta \ln r = 0 \quad \text{for} \quad M = 1 \quad (32)$$

線形化した方程式 (2)

熱流束とエントロピーの変化については、もとの式が線形なのでそのまま使える。この方程式系に対して、以下の形をした解を捜す。

$$\begin{aligned}\delta \ln p &= \delta \ln p_0 e^{\lambda t}, \\ \delta \ln r &= \delta \ln r_0 e^{\lambda t}, \\ \delta \ln \rho &= \delta \ln \rho_0 e^{\lambda t}, \\ \delta \ln T &= \delta \ln T_0 e^{\lambda t}, \\ \delta L &= \delta L_0 e^{\lambda t}, \\ \delta s &= \delta s_0 e^{\lambda t}.\end{aligned}\tag{33}$$

添字 0 がついたものは時間発展解の空間依存性を表す。

固有値問題

$$\frac{d\delta \ln p_0}{dM} = \frac{M}{4\pi p r^4} (\delta \ln p_0 + 4\delta \ln r_0) \quad , \quad (34)$$

$$\frac{d\delta \ln r_0}{dM} = -\frac{1}{4\pi r^3 \rho} (3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0) \quad , \quad (35)$$

$$KT \frac{d\delta \ln T_0}{dM} = -\frac{\delta L_0}{(4\pi r^2)^2 \rho_0} \quad , \quad \frac{d\delta L_0}{dM} = -\lambda T \delta s_0 \quad (36)$$

$$\delta \ln p_0 = \delta \ln \rho_0 + \delta \ln T_0 \quad , \quad (37)$$

$$\delta s_0 = \frac{3}{2} \delta \ln T_0 - \delta \ln \rho_0 \quad . \quad (38)$$

が出てくる。

境界条件

$$3\delta \ln r_0 + \delta \ln \rho_0 = 0 \quad \text{for } M = 0 \quad (39)$$

$$\delta \ln r_0 = 0 \quad \text{for } M = 1 \quad (40)$$

$$\delta L = 0 \quad \text{for } M = 0 \quad (41)$$

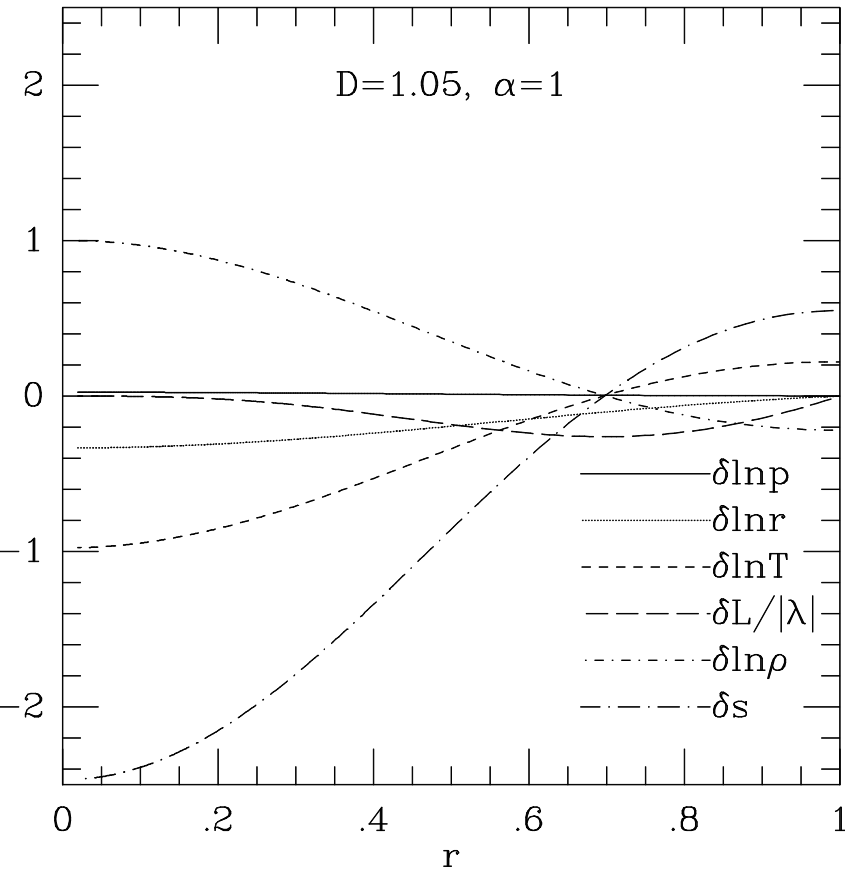
$$\delta L = 0 \quad \text{for } M = 1 \quad (42)$$

ということになる。

解析結果 1

以下、結果。

安定な場合



λ : 固有値

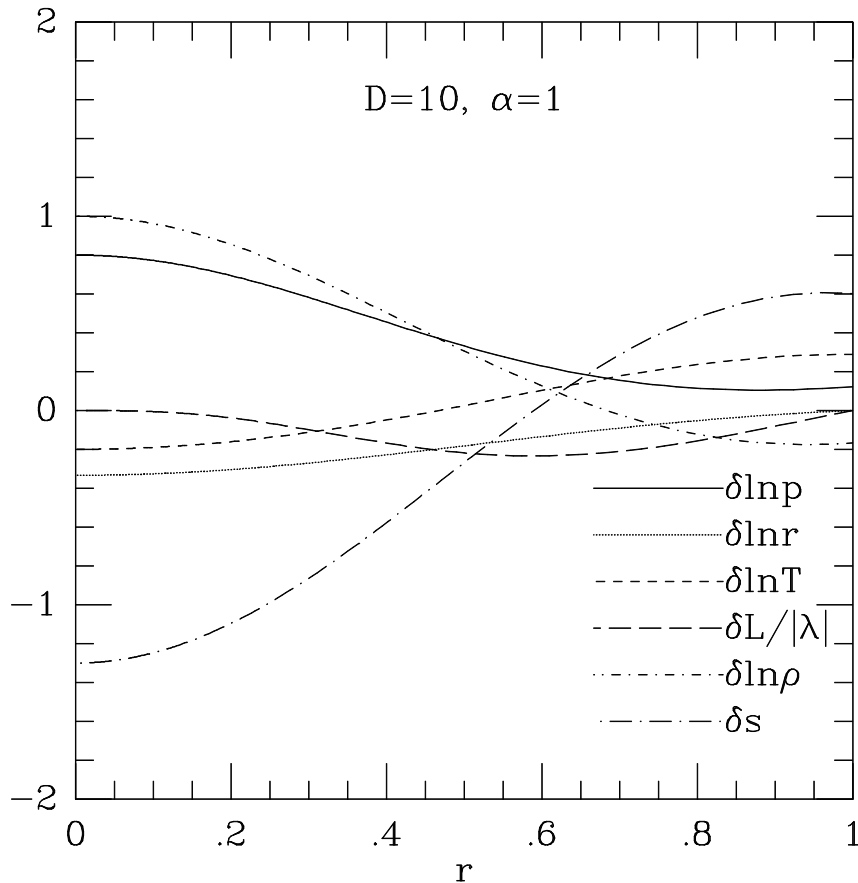
$D = 1.05$: 重力が無視できる場合。

- 圧力は変化しない
- エントロピーと温度が比例

要するに、普通の断熱容器のなかのガス。

解析結果 2

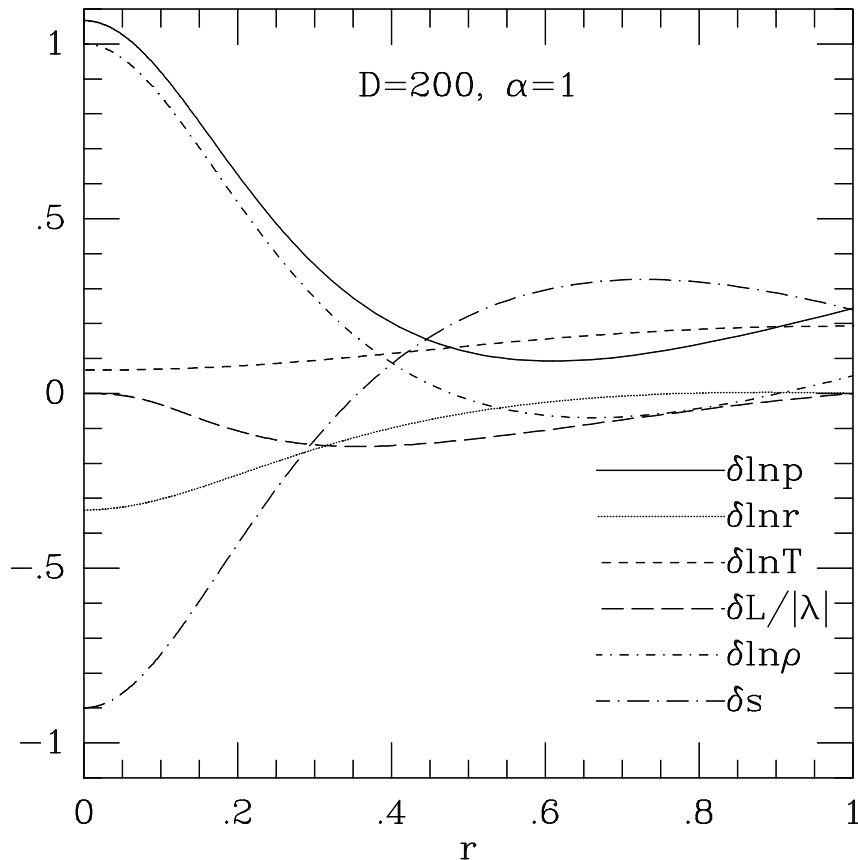
安定な場合 (2), $D = 10$



- 中心で圧力が上がる
- 温度は断熱変化の影響も受けるので、エントロピーとずれる

解析結果 3

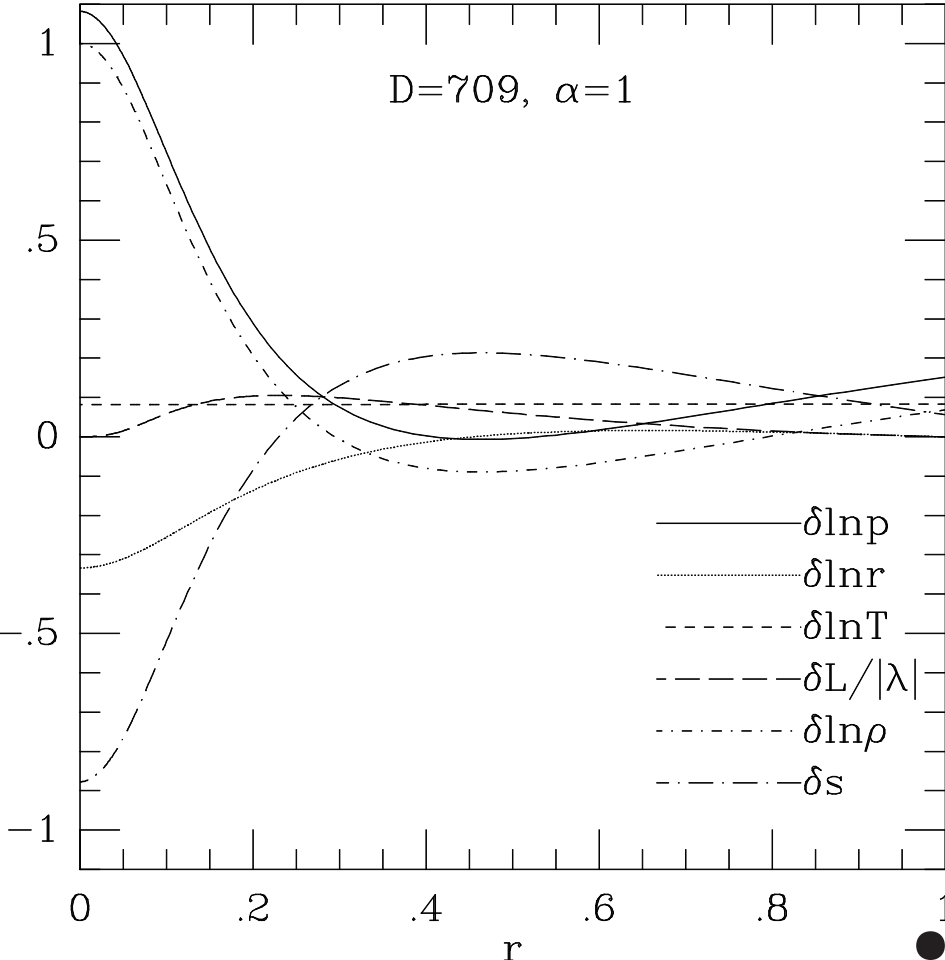
安定な場合 (3), $D = 100$



- 中心で温度も上がる
- 温度勾配はエントロピー変化を減らす向き（この場合中心の方が低温）
- 熱力学的には安定

解析結果 4

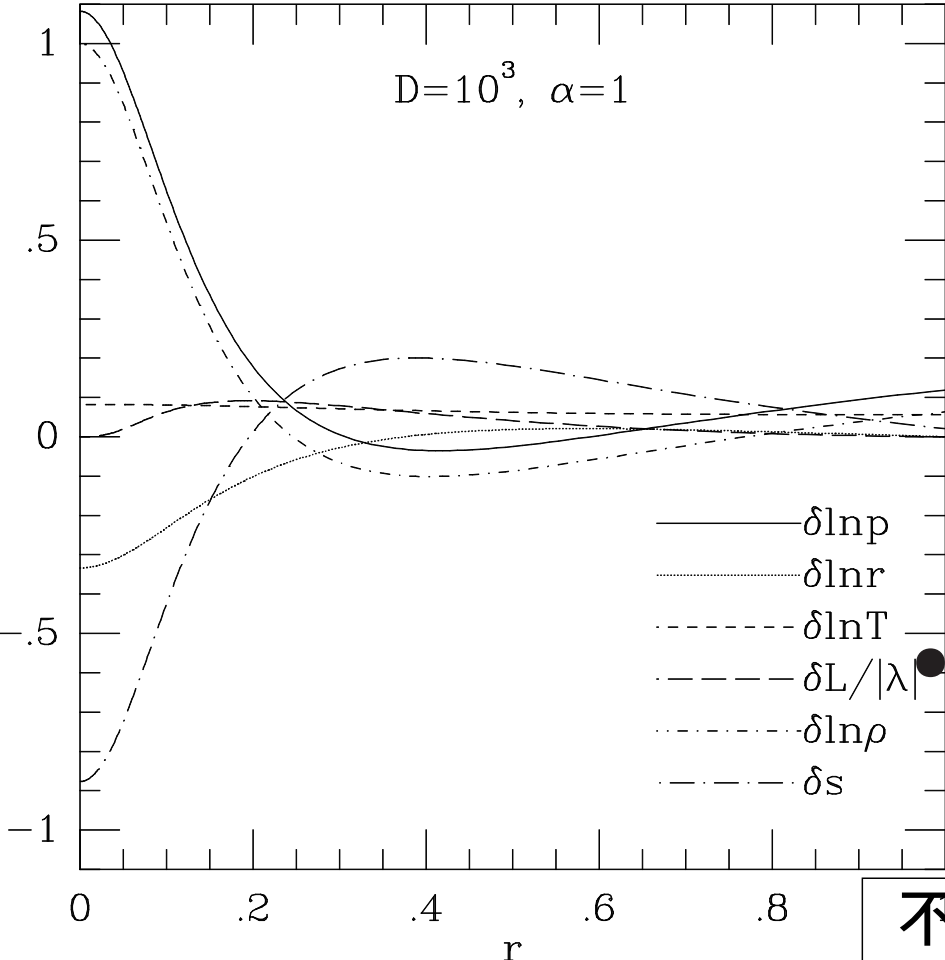
中立安定, $D = 709$



● 温度勾配ができない

解析結果 5

不安定, $D = 1000$



● 中心のほうで温度上昇が大きい

不安定になっている

結果のまとめ

というわけで、線形解析の結果：

断熱壁をつけて等温の平衡状態を作っても、重力が効いていると熱力学的に不安定

一応、「重力熱力学的不安定性」 gravothermal instability という名前がついている。

有限振幅の進化

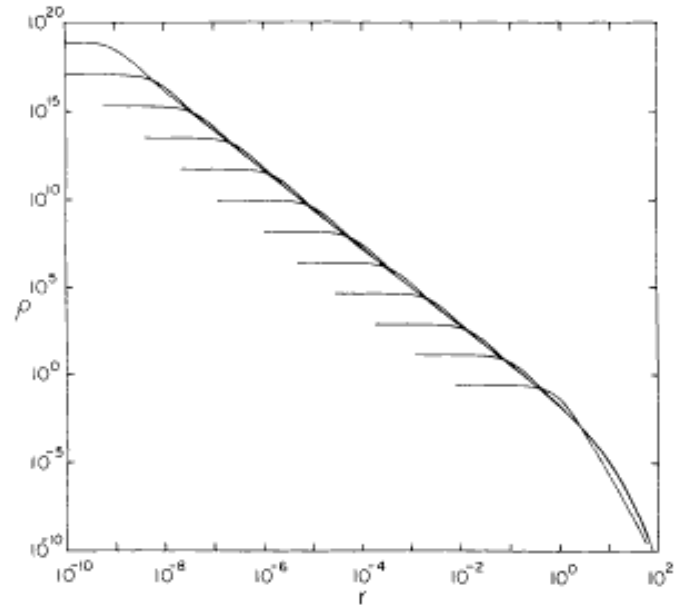
摂動が有限振幅まで成長したあとの進化：数値計算で調べる。

Hachisu *et al.* (1978)：自己重力流体について数値計算した。

Lynden-Bell & Eggleton

(1980)：流体の自己相似解を求めた

Cohn (1980)：流体近似を使わない軌道平均フォッカー・プランク方程式の数値積分から、自己相似解が実現していることを示した。



ガスと N 体の違い

このあたりの進化、すなわち重力熱力学的不安定や自己相似解については、流体近似、フォッカー・プランク近似を使って分布関数の進化を数値計算する方法、 N 体計算の間の一一致は素晴らしくよい。

何故か、、特に、流体近似がそれらしい結果を出す理由というのは、本当には良くわかっていない。

ミクロには、流体と多体系は全然違う。

流体：平均自由行程が短い。局所的には熱平衡

多体系：平均自由行程（緩和時間 \times 速度）が系の大きさより大きい。分布関数が局所的でない。（運動の積分の関数）

流体近似がうまくいかないとわかっている場合：

こういうのはもちろんある。

- 粒子が等質量ではない時
- 速度分布に非等方性が発達する場合

Linear Series Analysis と関係した話題

初めて不安定性が議論された時の方法: Linear Series Analysis

これは一体なにか？

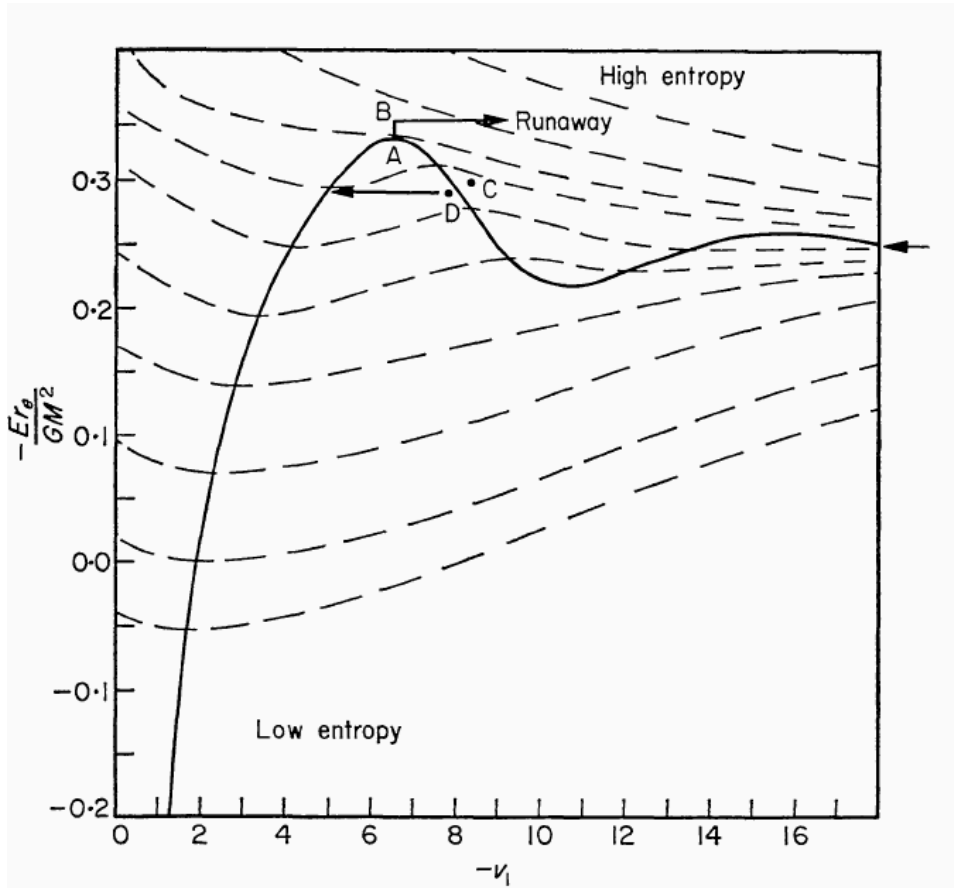
Lynden-Bell and Wood (1968, MNRAS 138, 495)

半径、質量一定の平衡形状の系列を考える。

実際に計算するには、等温解をどこか有限の半径で切ったもので、半径、質量等をスケールしなおせばいい。

とにかく、これで例えば中心と壁のところの密度比 D をパラメータとして系列がでる。

系の全エネルギー



横軸は $\ln D$ 、縦軸はエネルギー (符号逆)

$D=709$ でエネルギー極小
= 中立安定

そこから先は不安定

エネルギー極小と安定性

何故エネルギー極小が中立安定だったり、そこから先が不安定だったりするのか？

あんまり自明ではない。(原論文の説明も要領を得ない)

一応、中立安定点には以下のような解釈が可能

エネルギー極小点: エネルギーを変えないで(断熱的に) D を(微小量)変えることができる。

つまり、系を等温に保つ摂動で、エントロピーを保存して構造を変えるものがある。

つまり、中立安定な摂動がある。

線型安定性解析との関係

中立安定点では、ゼロ固有値に対応する固有関数は温度勾配を作らないものであった。

従って、中立安定点を探すだけなら、摂動を温度勾配を作らないものに制限してかまわない。

逆に、温度勾配を作らない摂動は、熱平衡状態を熱平衡状態に移すものしかない。

従って、エネルギーを保存して温度勾配を作らない摂動は、エネルギーが極値を取るところにしかない。

と、これはいいけど、中立安定点より先がどうなってるかは linear series analysis では本当は良くわからない。

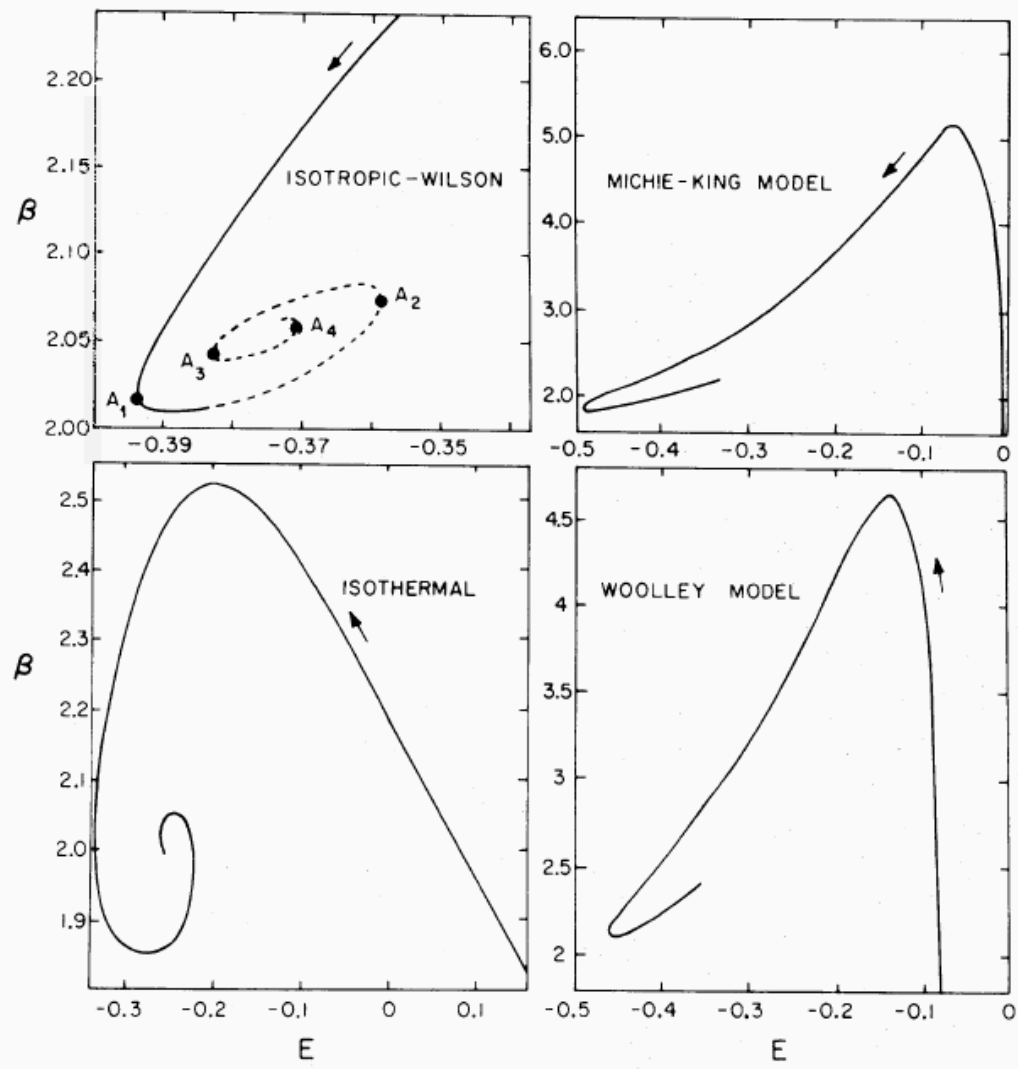
Linear Series Analysis が危ない例

固有値問題を解くのと違って、Linear Series Analysis は平衡系列を求めるだけでできちゃうので、いろいろな論文が発生する。

- Katz 1980, MNRAS, 190, 497
- Taruya and Sakagami, 2002, Physica A, 307, 185

他にもいろいろあるけど、影響が割合大きいものということで。

Katz 1980



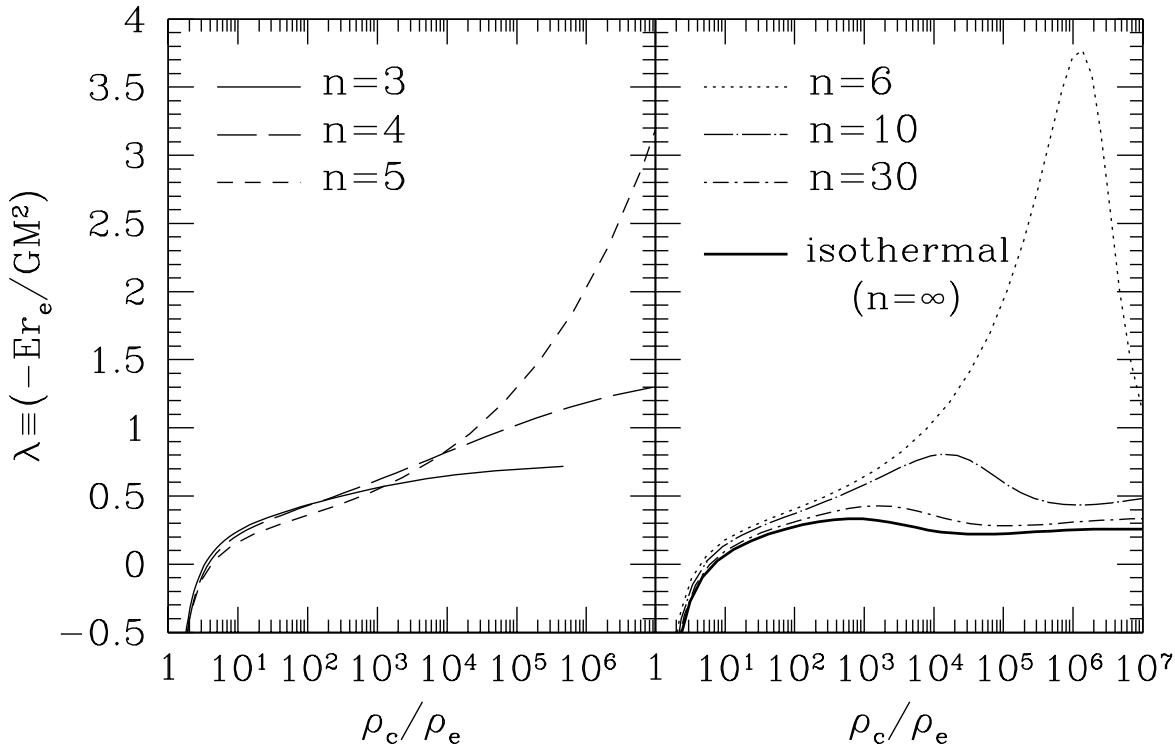
King model の系列に Linear Series Analysis を適用。

「中立安定点」を「発見」 ($W_0 \sim 12$)

もともと等温平衡解ではないもの:
エネルギー一定の摂動が中立安定に対応するわけではない。

Taruya & Sakagami 2002

断熱壁をつけたポリトロープに同様な解析を適用



$n \geq 5$ で「不安定性」発見

Taruya & Sakagami 2002 再考

実際には彼らは単にポリトロープをなんかしたわけではない。

Tsallis エントロピー $(f^q - f)/(q - 1)$

普通のエントロピー $f \ln f$ を $q \rightarrow 1$ の極限として含む、「一般化された」エントロピー。

この極値を取る分布 = ポリトロープ (q と n は対応する)

そういうものを考える意味: 正直に言って「よくわからない」

Tsallis エントロピー極値は熱平衡であるわけではないので、「安定性」に意味があるわけではないのは King model の場合と本質的には同じ。

自己相似解の後の進化

自己相似解：有限時間で中心密度が発散

「その後」どうなるか？が問題

- 球状星団
- 矮小銀河の中心部
- 普通の銀河の中心部（？）

今までに密度が発散しているはずのものもある。

- 途中でブラックホールに、、、（普通の球状星団では難しい）
- 連星によるエネルギー供給で反転

連星

連星： 3 体散乱で確率的にできる（3 つ粒子があれば、そのうち2 つを連星にして重力エネルギーをとり出した方がエントロピー的には得なので）。

普通の星の中心での核融合と同様にエネルギー供給として働く
→ 収縮を止めて、安定な定常状態になる？

数値計算

Henon (エノン・ハイレスのエノンと同一人物) (1975): モンテカルロ法 (といっても、メトロポリス法みたいなのは全然違う、、、詳しくは後述) での計算にエネルギー供給を人為的に入れて、ホモロガスに膨張する解を得た。

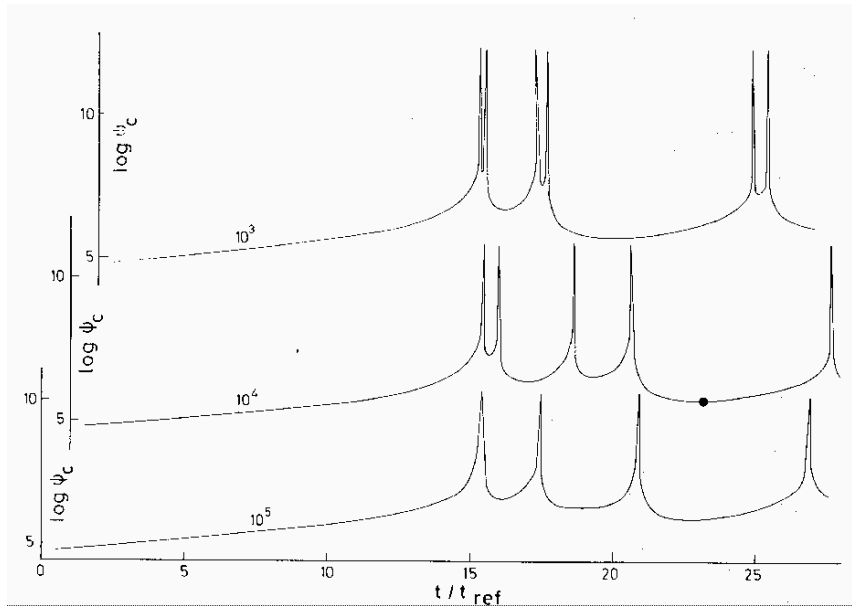
Heggie 1984, Goodman 1984: 同様な結果

Sugimoto and Bettwiser 1983: ホモロガスに膨張が実は不安定であることを、流体近似の数値計算から「発見」

1985年には他のグループも確認、1986年にはフォッカーブランクでも確認。

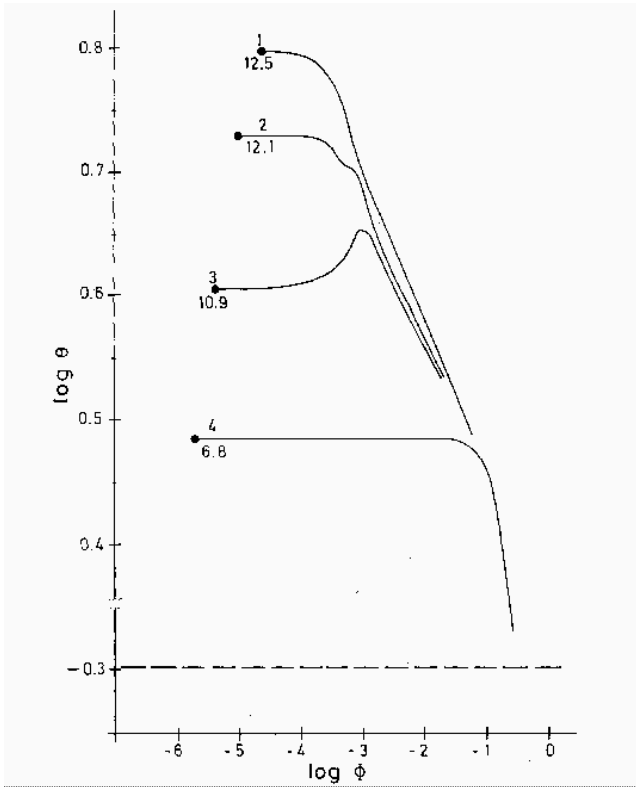
重力熱力学的振動

Sugimoto and Betwieser の計算結果



3本あるのはエネルギー生産の係数が違う。
粒子数が違うことに対応

温度構造の変化

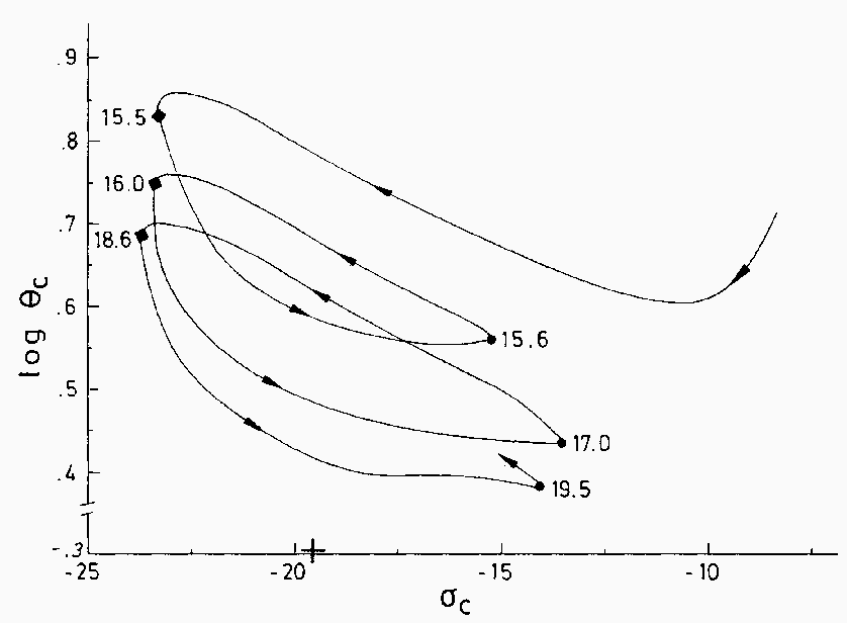


膨張中には温度が逆勾配になる領域が発生する

膨張自体が重力不安定によっている

温度構造の変化

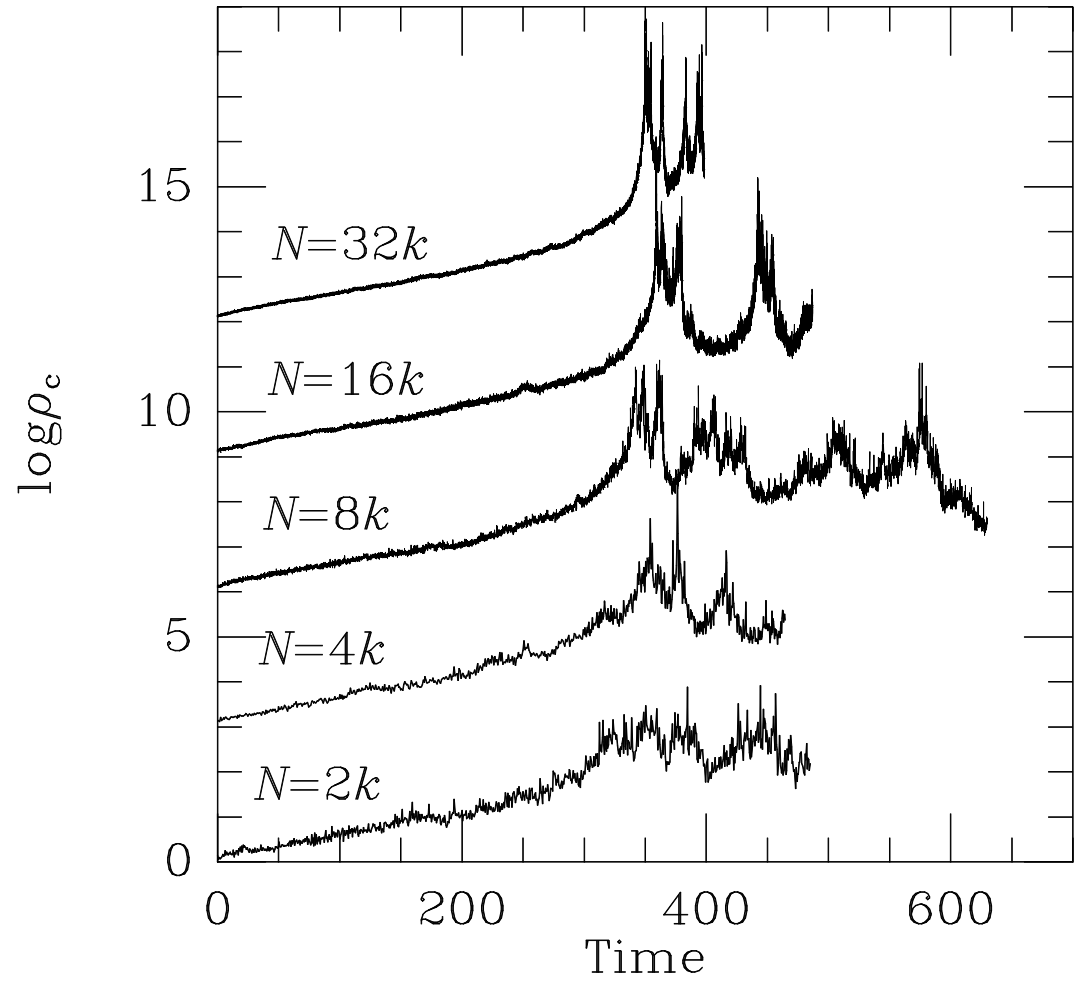
温度とエントロピーの平面でのコアの軌跡



熱機関としてみると冷凍機のサイクルになっている
これは、振動が重力不安定によっていることと対応している

N 体計算

1996 年： N 体計算でも確認



中心ブラックホールのある星団の 構造と進化

大抵の銀河の中心にはブラックホールがあるらしい

その時にどんなことを考える必要があるか、というのは衝突系でも無衝突系でも良い応用例になる。

理屈がすっきりするのは衝突系の時。(Bahcall and Wolf 1978)

考えられたのは当時は球状星団の X 線源は中心ブラックホールである (かも) と考えられていたから。

そのうちにそうでないとわかった、、、

Bahcall and Wolf の理論

まあ、元は数値計算したみたいですが、後付けで整理された美しい理論は以下の通り:

仮定:

- ブラックホールの重力が支配的な領域
- 分布関数は等方的
- エネルギーフラックスが定常、半径によらない
- 質量フラックスは無視

Bahcall and Wolf の理論 続き

速度分散はポテンシャルで決まる: $v \propto r^{-1/2}$

外側が温度下がるので熱流は外向き。

ある半径での熱流 \propto その領域の全エネルギー / 緩和時間

緩和時間は $t_r \sim v^3 / \rho$ の程度

全エネルギーは $T = Mv^2 \sim \rho r^3 v^2$ の程度

$T/t_r = \text{一定}$ と置くと

$$\rho \sim r^{-7/4} \quad (43)$$

という関係がでてくる。

他のケース

1. 中心ブラックホールが断熱成長する場合
2. 力学的な時間スケールで「突然」中心ブラックホールができる場合
3. 質量分布がある系の熱力学的な進化

これらはそれぞれ、対応する現実的な系がある (かもしれない) と考えられる。

中心ブラックホールが断熱成長する場合

ガス降着などでブラックホールが比較的ゆっくり成長する場合

「ゆっくり」= 力学的な時間スケールよりは十分に遅いが2
体緩和の時間スケールよりは速い

銀河中心の巨大ブラックホールの場合にはありそう

この場合の分布関数の変化を数値的および解析的に調べたの
は Young (1980, ApJ, 242, 1232)

Young の議論

初めはブラックホールがなかったとして、分布関数が $f(E, J)$ であるとする。考えないといけないことは以下の2つである。

- 最初に (E, J) にいた星はどこに移動するか
- その結果 $f(E, J)$ はどう変化するか

というわけで、順番に考えていこう。

(E, J) にいた星はどこに移動するか？

- ポテンシャルは球対称のままなので角運動量 J は保存する
- ポテンシャルの変化はゆっくりであるとしたので、断熱不変量がある

断熱不変量

radial action

$$I_R = \oint v_r dr = 2 \int_{r_-}^{r_+} [2(E - \phi) - (J/r)^2]^{1/2} dr \quad (44)$$

が保存する。

初めに恒星系は有限サイズのコアを持っていたとすると、コアの十分内側では、ポテンシャルは中心密度を ρ_0 として

$$\phi = \frac{2\pi}{3} \rho_0 r^2 \quad (45)$$

で与えられ、断熱不変量は

$$I_R = \oint v_r dr \propto \sqrt{\frac{3}{\rho_0 \pi}} E - J \quad (46)$$

(比例係数は無視) となる。

ブラックホールができた後

星がブラックホールの十分近くまで来たとするとき新しいポテンシャルは $-M_{BH}/r$ 。断熱不変量は

$$I_R^* = 2\pi(-J + M_{BH}\sqrt{-2E^*}) \quad (47)$$

(BH ができてからの量は * を付ける)

さて、問題は、 $f^*(E^*, J)$ がどうなるかであり、これがわかれば密度分布がわかる。少しややこしいのは、最初のエネルギーが同じであっても最終のエネルギーは角運動量 J によって違うことで、このために算数が少し面倒になる。

$N(E, J)$ の算数

分布関数 f ではなく、 (E, J) 空間での分布関数 $N(E, J)$ を考えると、ブラックホールの成長によってこれは滑らかに射影されるので

$$N^*(E^*, J)dE^*dJ = N(E, J)dEdJ \quad (48)$$

なる関係が成り立つ。 J は同じなので、これは

$$N^*(E^*, J)dE^* = N(E, J)dE \quad (49)$$

ということである。従って、 dE/dE^* が計算出来ればいい。ここでは、 I_R と E の関係を使ってみよう。

計算続き

I_R を E で偏微分すると

$$\left. \frac{\partial I_R}{\partial E} \right|_J = P(E, J) \quad (50)$$

となることが知られている。但し、ここで $P(E, J)$ は半径方向の周期である。(計算は簡単であるのでやってみること) 従って、

$$\left. \frac{dE^*}{dE} \right|_J = \frac{P(E, J)}{P(E^*, J)} \quad (51)$$

となっただいぶ目標に近づいてきた。

まだ計算続き

後は f と N の関係だが、これは単に

$$N(E, J) = 8\pi^2 J f(E, J) P(E, J) \quad (52)$$

であるということが知られている。で、結局これらから何がわかるかということ、

$$f^*(E^*, J) = f(E, J) \quad (53)$$

ということである。と、これは Young の論文にそった議論だが、単にリウビルの定理からもこの場合に f が保存するのは当然な気もする。

まあ、それはともかく

結局、初めにコアの中心近くにいたとすると f は一定なので、結局ブラックホールの近くではやはり f^* が一定となる。この時は、速度が $r^{-1/2}$ で上がるので、 f を一定に保つためには $\rho \propto r^{-3/2}$ でないといけないことがわかる。

つまり、ブラックホールが恒星系の中心で断熱的に成長する場合には、ブラックホールの十分近くでは $\rho \propto r^{-3/2}$ のカスプができることになる。

美しい理論、重要な結果。

直接の天文学的な応用？

巨大楕円銀河と近傍の円盤銀河：どちらも中心スロープが $-3/2$ ではない。

巨大ブラックホールの周りの観測

- 巨大楕円銀河ではスロープが非常に浅く、 -0.2 から -1 程度の範囲に分布する。
- 我々の銀河系や近傍の円盤銀河では、 -2 的と考えられている (我々の銀河系でもブラックホールに本当に近い、距離にして 1 pc くらいのところの話なのでなかなか良くわからないが)。

もしも、QSO が巨大楕円銀河の直接の progenitor であって、QSO のガスが無くなって静かになったものが巨大楕円銀河であるとするなら、ブラックホールの周りの恒星の分布は $-3/2$ 乗カスプになっているはず。

もっと浅いカスプは作れるか

ここまでは、

- 2体緩和による進化での定常状態
- 断熱的なブラックホールの成長に対する無衝突恒星系の応答

を考えた。

- 力学的な時間スケールでブラックホールが形成される
- 系の中心以外のところから落ちてくる

ならどうか。

銀河の合体とブラックホールの合体

宇宙初期のゆらぎから重力不安定で一気に作れば力学的時間でブラックホール。

しかし、現在の CDM 宇宙モデルでは最初に重力不安定からコラプスする質量スケールはかなり小さく、その中のバリオン質量はもっと小さいので巨大ブラックホールを一気に作るのは無理がある。

現実的な階層的な構造形成モデルを考えると、大きな銀河はより小さな銀河が合体することで形成されたということになる。この時に、銀河中心にあるブラックホールには何が起きるだろうか？、また、銀河の中心部の構造はどうなるのだろうか？

銀河の合体

銀河同士の合体は、前に議論した「激しい緩和」の典型であり、十分に緩和が進む前に構造が固まる

ブラックホールが最初に中心にあれば、合体してもブラックホールは初めから結構中心近くに行く。2つブラックホールがあればそれらは連星になり、しばらくは回りの星をはね飛ばして進化する。

ブラックホール連星の進化

ブラックホール以外は無衝突系である極限的な場合を考える
ブラックホール連星は合体してできた銀河の中心にいて、重心運動の速度は 0 になって止まっている。

ブラックホール連星の軌道長半径程度まで近づいた星は基本的にははね飛ばされて無くなるので、ある程度よりもエネルギーが低い粒子は存在しないことになる。

(細かいことをいうとはね飛ばされる条件はエネルギーではなく近点でのブラックホールからの距離)

浅いカスプ

エネルギーに下限があると、簡単な議論から中心に $\rho \propto r^{-1/2}$ のカスプができることがわかる。以下、Nakano and Makino (1999, ApJL 525, 77) に従ってこのことを示す。

分布関数がエネルギー E だけの関数だとすると、ある半径 r での密度は

$$\rho(r) = 4\pi \int_{\phi(r)}^0 f(E) \sqrt{2[E - \phi(r)]} dE, \quad (54)$$

で与えられる。これは速度空間での積分を、積分変数を E にとって書き換えたただけである。ここで、 $f(E)$ はあるエネルギー E_0 よりも深いところ ($E < E_0$) では 0 であると仮定しよう。

ブラックホール近くの分布

ブラックホールに十分に近いところでは、ポテンシャルが十分に深いとすると、積分区間の下限は $\phi(r)$ だが、そこに来る前に $f(E)$ は 0 になるので前の式は

$$\rho(r) = 4\pi \int_{E_0}^0 f(E) \sqrt{2[E - \phi(r)]} dE, \quad (55)$$

と書き換えられる。さらに、根号の中で、 $|\phi(r)| \gg |E|$ とすれば、 $E/\phi(r)$ で展開できて、

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 4\pi \int_{\varepsilon_0}^0 f(E) \sqrt{2[E - \phi(r)]} dE \\ &= 4\sqrt{-2\pi\phi(r)} \int_{E_0}^0 f(E) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{E}{\phi(r)} + O\left(\left[\frac{E}{\phi(r)}\right]^2\right) \right] dE \\ &\sim 4\sqrt{-2\pi\phi(r)} \int_{E_0}^0 f(E) dE \end{aligned} \quad (56)$$

(57)

計算続き

最後の変形では結局展開の 0 次の項だけを残した。ここで、ポテンシャルが十分に深い、ブラックホールが支配的な領域を考えていたので、

$$\phi(r) \sim -GM_{\text{BH}}/r \quad (58)$$

であるから、結局

$$\rho(r) \propto \sqrt{-\phi(r)} \sim \sqrt{\frac{GM_{\text{BH}}}{r}}. \quad (59)$$

となってブラックホールに十分に近いところでは $\rho \propto r^{-1/2}$ のカスプができることがわかる。

結果の解釈等

この結果は、本質的には

1. 分布関数が $f(E)$ で書ける (等方的である)
2. $E \rightarrow -\infty$ で $f(E)$ が十分速く 0 になる

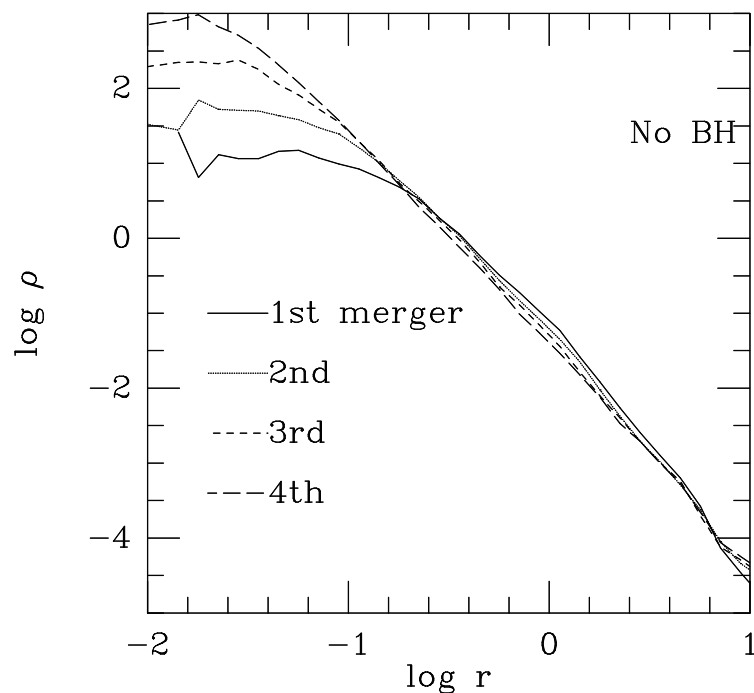
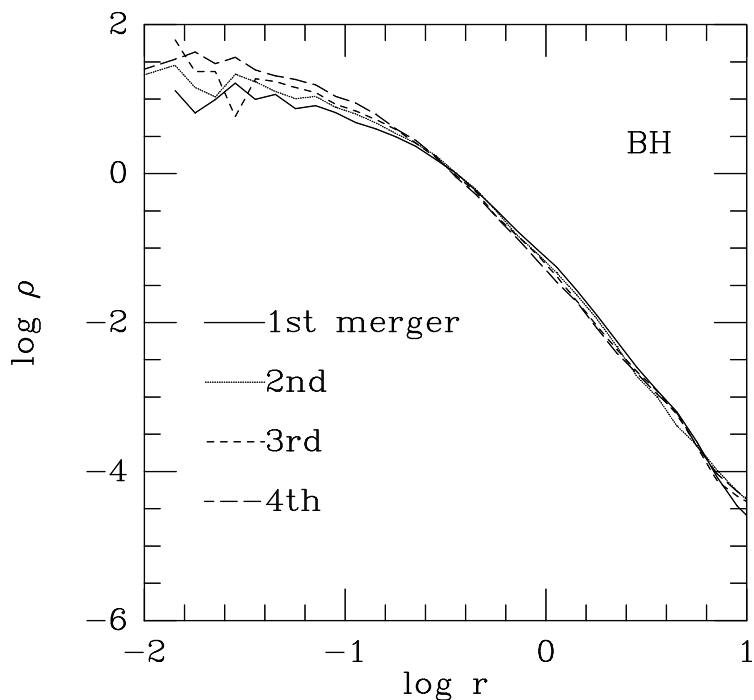
という 2 つの仮定だけによっているので、割合に一般性が高いと考えられるであろう。

とはいえ、上の仮定は結構強い仮定なので、実際に成り立つか? という問題はある。まず、数値計算ではどんな風かというのを見てみよう。

数値計算の例

手前味噌になるが Makino and Ebisuzaki 1996 (ApJ 465, 527) を例に。

中心ブラックホールを持つ銀河 (左) ともたない銀河 (右) について、合体したものを種にしてまた合体させるということを繰り返した時のスケールした密度プロファイル。



結果の解釈

ブラックホールがある場合:合体を繰り返した時に中心に浅い密度カuspが形成され、その領域の銀河の半径に比べた相対的な大きさはほぼ一定になっている

この部分の傾きはほぼ $-1/2$ であり、Nakano and Makino の理屈の通りになっているといえる。

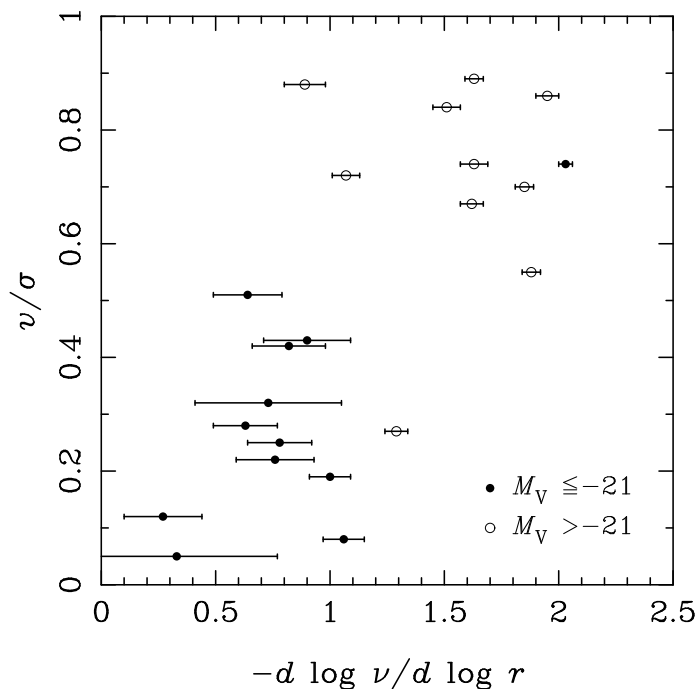
まあ、論文の出版年から想像されるように、Makino and Ebisuzaki は「結果はこうなった」と書いているだけでなぜそうなるのかという説明は Nakano and Makino までちゃんとはなかったわけである。

数値計算と理論の関係

こういう、理論的な理解なしに数値計算で結果だしてしまうのはは本当はよろしくないという考え方もある。というのは、特に定性的な結果については、数値シミュレーションが正しいか間違っているかということの判断は、解析的な解釈がつかない限り一般には非常に難しいからである。NFW プロファイルの話のように、ユニバーサルな結果と思ったものが、ユニバーサルに計算間違いしていたせいということもある。

ブラックホールがある銀河の合体の、この数値シミュレーションについては、やった人は計算の信頼性についてはそれなりの自信があったわけだが、Nakano and Makino の結果がでて初めて確信を持ってスロープが $-1/2$ になるといえるようになった。

観測



HST による Virgo Cluster の楕円銀河等の観測 (Gebhardt, K., et al., 1996, AJ, 112, 105, Faber, S. M., et al., 1997, AJ, 114, 1771) から、中心 ($0.1''$) の体積輝度密度の傾きと、回転速度と速度分散の比をプロットしたものである。シンボルの違いは絶対等級で、塗りつぶしてあるほうが明るい。

明るい楕円銀河はスロープが -1 よりも浅く、回転が小さいのに対して、暗い楕円銀河がスロープが -2 近くであり回転が卓越しているという傾向がかなりはっきりあることがわかる。

計算スキームの話をちょっとだけ

割合いろんなことが、シミュレーション(数値実験)でわかってきた。

数値実験はどんなふうに行っているか？

- 計算法
- 使う計算機

計算方法

- 独立時間刻み
- ツリー法等
- シンプレクティック公式等

独立時間刻み

重力多体問題: 原理的には単に大規模な常微分方程式の初期値問題

ナイーブに考えると、いろんな公式がライブラリであるので、それを使えば済みそうな気がする。

それだけで済むなら話は簡単

済まない理由:

- 粒子によって非常に大きく軌道のタイムスケールが違うことがある
- 連星とかそういったものができる

計算量への影響

単純な可変時間刻みでは計算量が大きくなる。

理由:

タイムステップの分布がべき乗的なテイルをもつようになる。

このため、粒子数が増えるに従って、タイムステップが短くなる。

対応

- 粒子毎に時間刻みをバラバラに変化させる。(独立時間刻み)
- 2体衝突、連星は座標変換して扱う。

独立時間刻みの原理

粒子毎にばらばらの時刻 t_i と時間ステップ Δt_i を与える

1. $t_i + \Delta t_i$ が最小の粒子を選ぶ。
2. その粒子の軌道を新しい時刻まで積分する。
3. その粒子の新しい時間刻みを決める。
4. ステップ 1 に戻る。

問題:ある粒子の時刻 $t_i + \Delta t_i$ で他の粒子の位置が必要

他の粒子の位置の計算

時間刻み可変の「予測子」を使えば問題ない

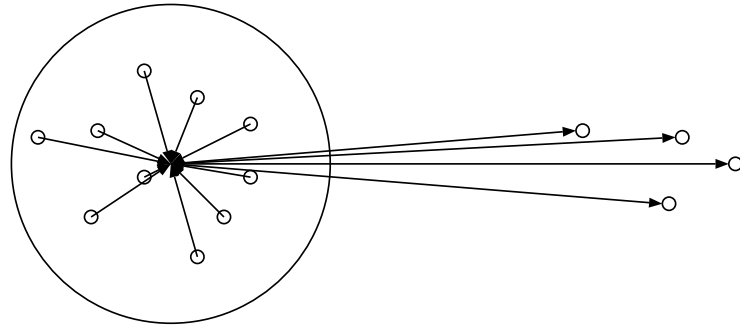
つまり、

- 各粒子の時間積分公式としては、可変ステップの線形多段階法をPEC モードで使う。
- ある粒子の新しい時刻での加速度を計算するには、他の粒子のその時刻での位置を予測子を使って予測する。

ということになる。

ツリー法、FMMの基本的発想

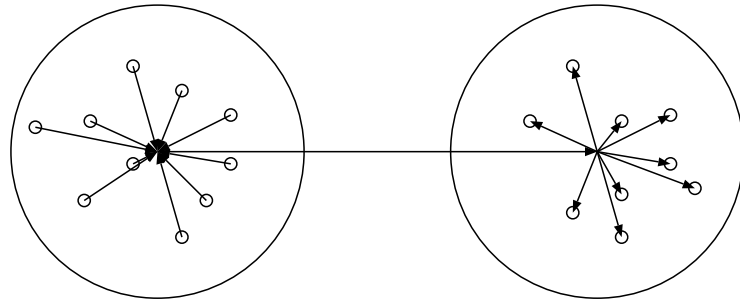
遠くの粒子
からの力は
弱い



Tree



まとめて計
算できな
いか？



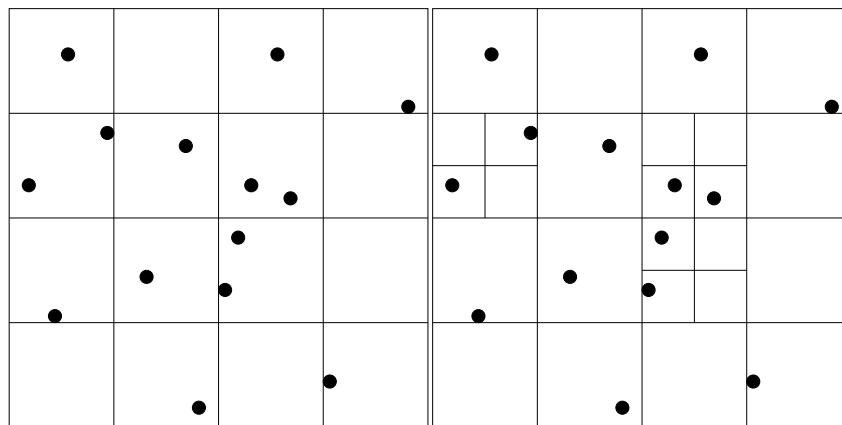
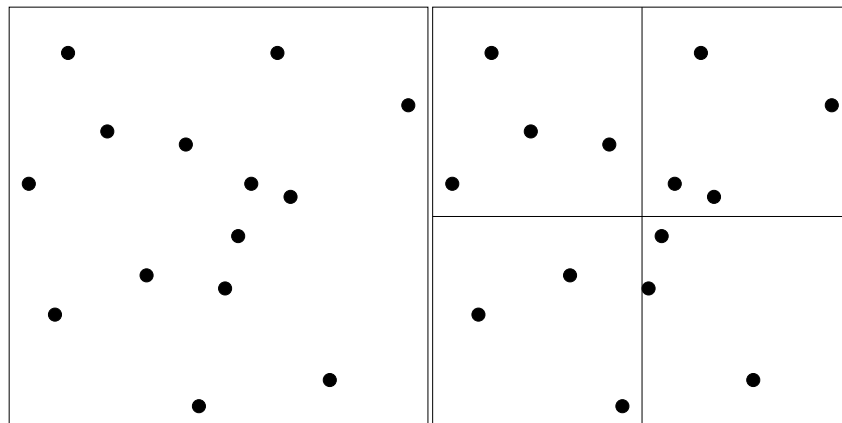
FMM

- ツリー：力を及ぼすほうだけをまとめて評価
- FMM：力を受けるほうもまとめて評価

どうやってまとめるか？ — ツリー法の場合

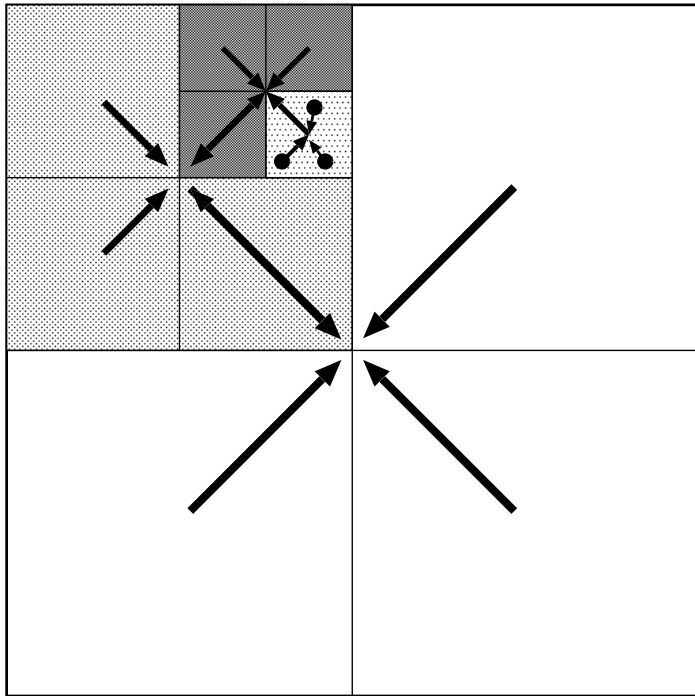
階層的なツリー構造を使う。

- まず、全体が入るセルを作る
- それを再帰的に 8 (2次元なら 4) 分割する
- 中の粒子がある数以下になったら止める (上の例では 1 個)



多重極展開の構成

まず、ツリーの各セルのなかの粒子がつくるポテンシャルの多重極展開を計算する。

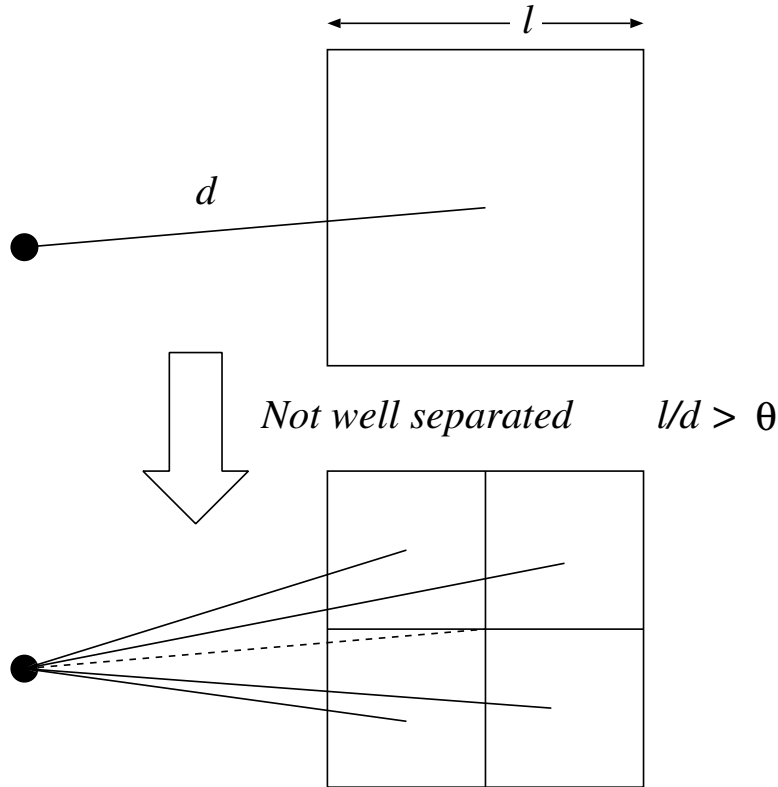


- 最下層のセル: そのなかの粒子が作るポテンシャルを多重極展開
- それ以外: 子セルの多重極展開の展開中心をシフトして加算

下から順に計算していけばよい。
計算量は $O(N)$ 。展開をシフトする式はかなり複雑。

ツリー法での力の計算

再帰的な形に表現すると格好がいい。



- 十分に離れている: 重心(あるいは多重極展開)からの力
- そうでない: 子ノードからの力の合計

系全体からの力 = ルートからの力

シンプレクティック公式の話

単純なシンプレクティック公式であるリープフロッグの基本的な考え:

$$H = T(p) + V(q) \quad (60)$$

に対して、 p に対する以下の変換

$$p \leftarrow p - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q} \quad (61)$$

と q に対する同様な変換がそれぞれシンプレクティックなので、それらを順番に適用したのもシンプレクティックになるというもの。

摂動ケプラー問題

摂動をうけたケプラー問題のハミルトニアン:

$$H = T(p) + V_1(q) + V_2(q) \quad (62)$$

惑星系なら V_1 が太陽からの重力で、 V_2 は自分以外の惑星からの寄与。

このとき

$$H_1 = T(p) + V_1(q) \quad (63)$$

の解はそれ自体シンプレクティックであり、また V_2 だけを考えて

$$p \leftarrow p - \Delta t \frac{\partial V_2}{\partial q} \quad (64)$$

というマッピングもシンプレクティックである。従って、この2つを組み合わせて積分公式をつくることができる。

解釈

リープフロッグ: $x \leftarrow x + \Delta t v$ と直線で動かす

MVS: ポテンシャル V_1 に沿って動かす

ケプラー問題は解析的に解けるので、このようなやり方で太陽中心の軌道を極めて高精度に積分できる。

計算機の性能

重力多体系の研究

- できるだけ沢山の粒子を使って
- できるだけ長い時間
- できるだけ正確に

計算するのが大事。というわけで、

- 速く、正確に計算できるような方法を考える
- 新しい、速い計算機に合わせた方法を考える
- それでも足りなければ計算機を作る

速い計算機を使う

計算法の話は少ししたので、これははしょって後の2つ。

速い計算機とはどんなものか？

普通のパソコンとスーパーコンピューター
なにが違うか？

昔は随分違った。

昔の「速い計算機」

30年前

- パソコンはなかった。
- 同じプログラムでも高い計算機のほうが速かった

20年前

- パソコンはあったけど、同じプログラムで高い計算機の1000倍とかそれ以上時間が掛かった（値段もそれくらいではあった）
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」というものになってきて、特別な工夫をしてプログラムをかかないと性能がでなくなった。

今の「速い計算機」

10年前

- パソコンが非常に速くなってきた
- 高い計算機は「ベクトルプロセッサ」がさらに沢山並んだ並列計算機になってきた。

今

- パソコンはもっと速くなった。
- ベクトルプロセッサを並列に使うより、パソコンを並列に使う方がずっと安くて速くなってきた。

例：

東大「スーパーコンピュータ」 9.2Gflops × 2048
台

値段は数10億円

普通のパソコン 1台 24 Gflops 10万円

値段あたりの性能を計算してみると、、、

プログラムにはいろいろ難しいことを考えないとい
けない。

- 計算機どうしが通信すると時間が掛かる。
- もっと細かい話いろいろ。

計算機を作る？

- 計算機のなにもかもを全部作るのは大変
- 計算時間のほとんどは粒子間の重力の計算（計算法によってはちょっと違うけど、、、）

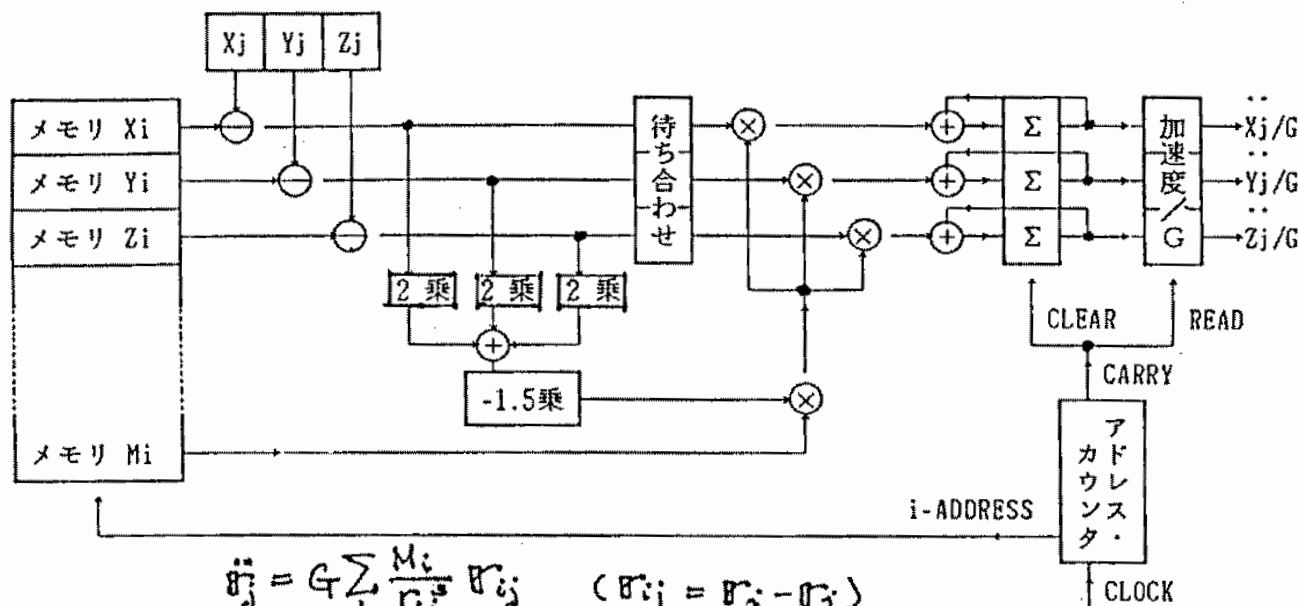
重力の計算だけ速くする計算機を考える (GRAVITY PIPE, GRAPE)

GRAPE の考え方

- 重力多体問題 (強結合プラズマ、分子動力学): 粒子間相互作用の計算が計算量のほとんど全部
- 効率のよい計算法 (Barnes-Hut tree, FMM, Particle-Mesh Ewald (PPPM) ...): 粒子間相互作用の計算を速くするだけでかなり加速できる
- そこだけ速くする電子回路を作る (「計算機」というようなものではない)

近田提案

1988年、天文・天体物理夏の学校



+, -, ×, 2乗は1 operation, -1.5乗は多項式近似でやるとして10operation位に相当する。

総計24operation.

各operationの後にはレジスタがあって、全体がpipelineになっているものとする。

「待ち合わせ」は2乗してMと掛け算する間の時間ズレを補正するためのFIFO(First-In First-Out memory).

「Σ」は足し込み用のレジスタ。N回足した後結果を右のレジスタに転送する。

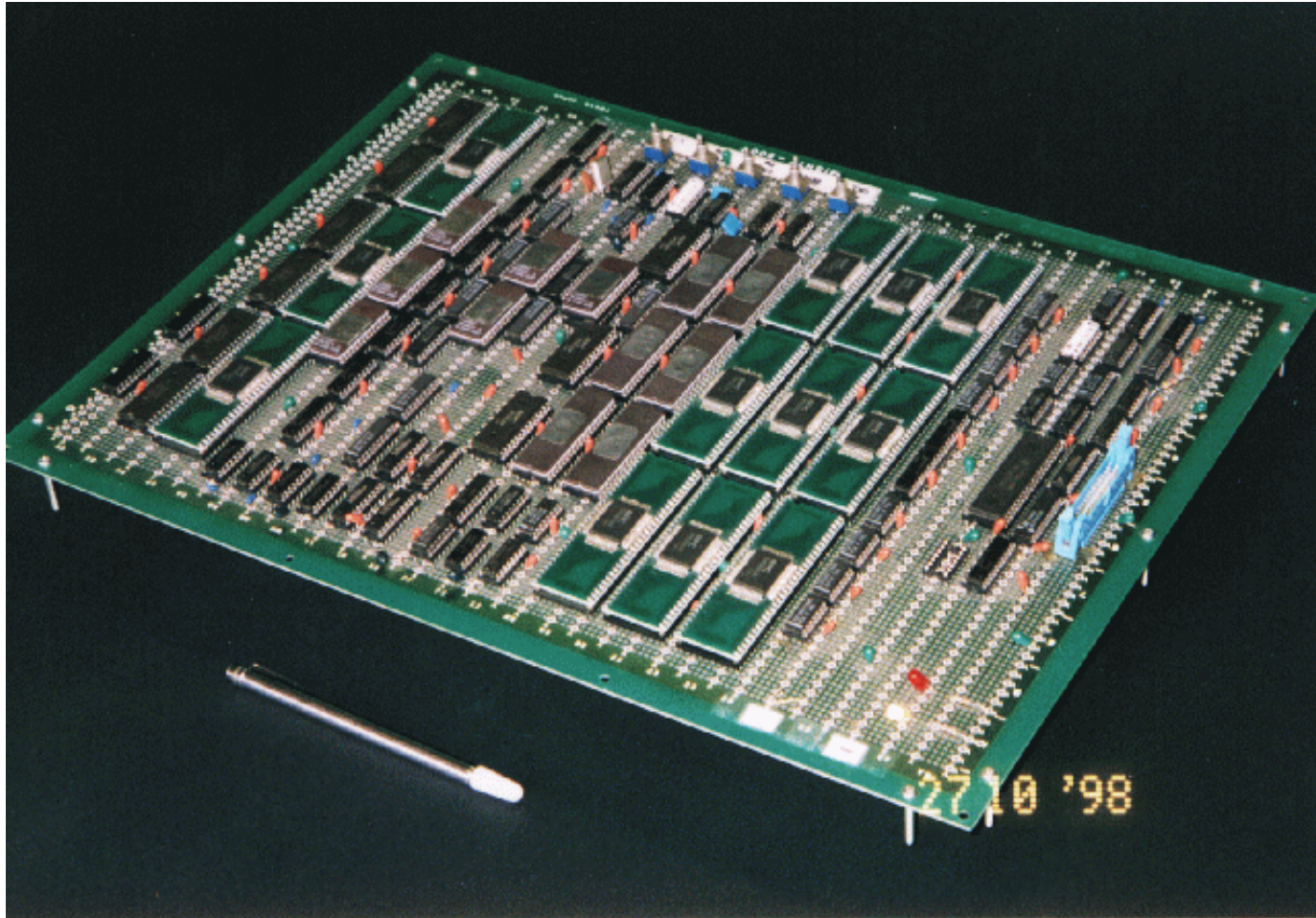
図2. N体問題のj-体に働く重力加速度を計算する回路の概念図。

近田さんによる見積もり

- 32 ビット固定小数点
- IC 200 個
- 体積 0.1m^3
- コスト 400 万

「但し、近田電子製作所の見積もりは甘いという声もあることを付け加えます」

GRAPE-1 (1989)

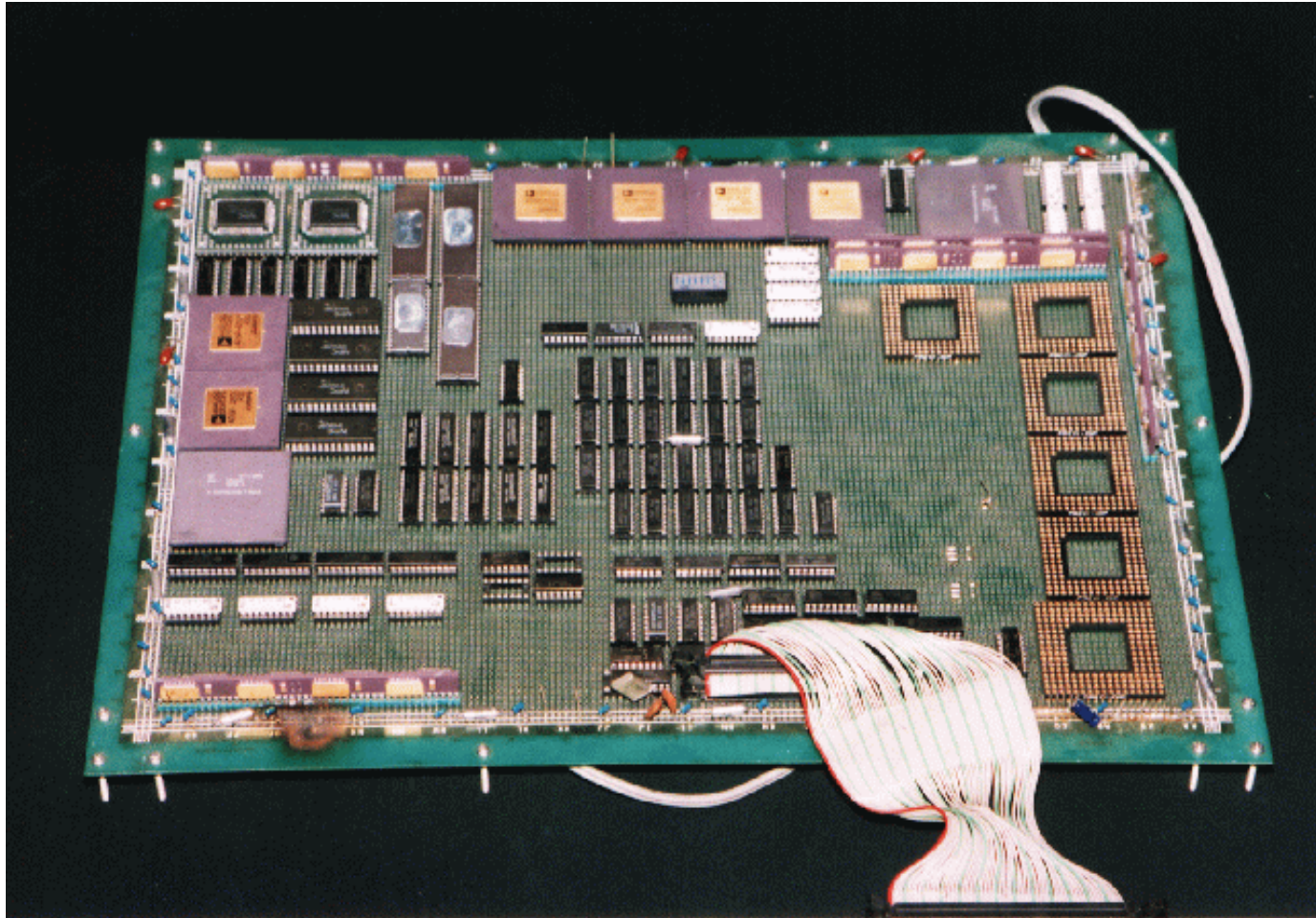


GRAPE-1 の中身

- 演算毎に語長指定。固定 16–対数 8–固定 32–固定 48
- IC 100 個
- コスト 20 万
- 240Mflops 相当
- 伊藤、牧野、戎崎

近田さんの他、慶応の川合研の朴さんに色々教えてもらった。

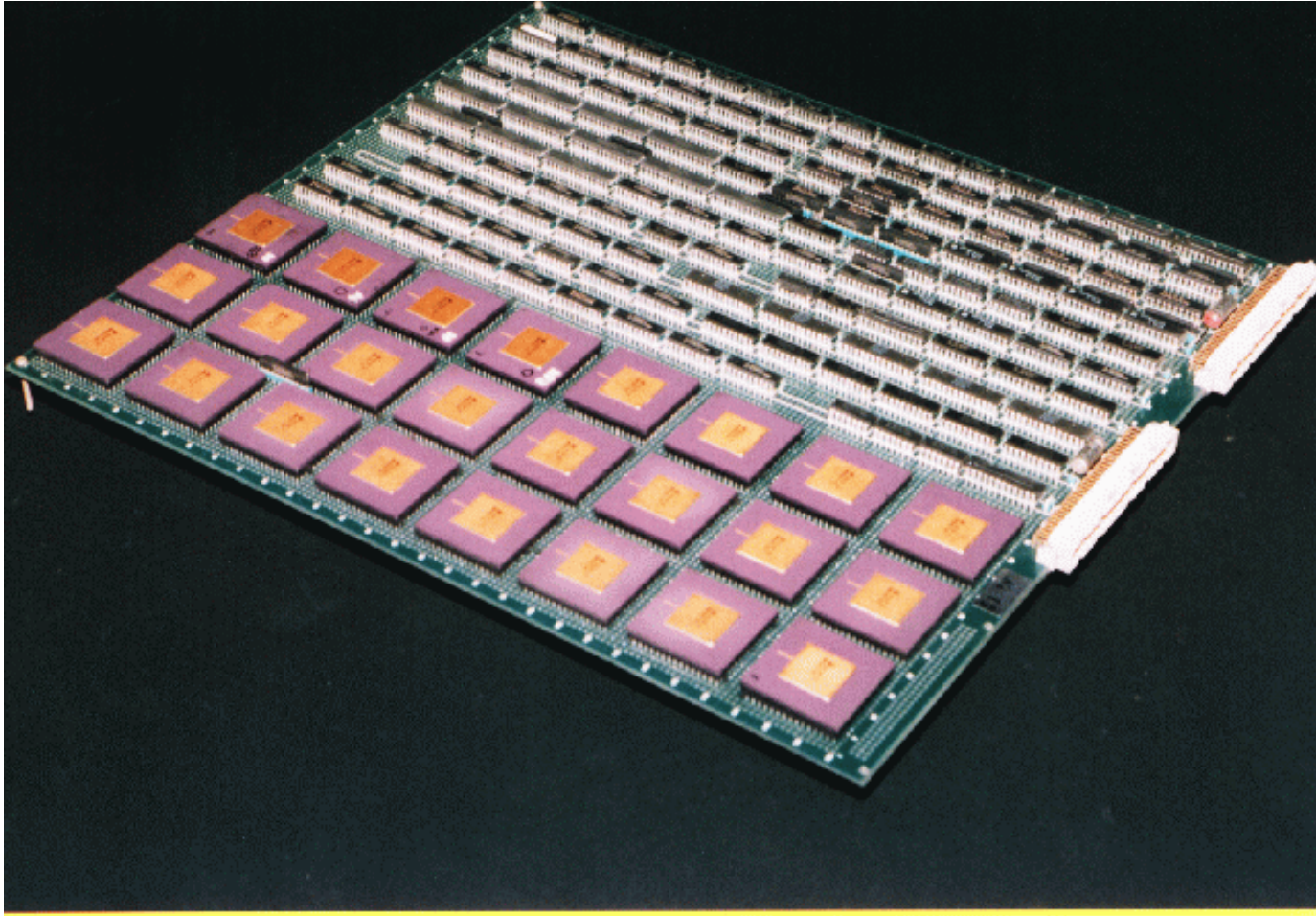
GRAPE-2(1990)



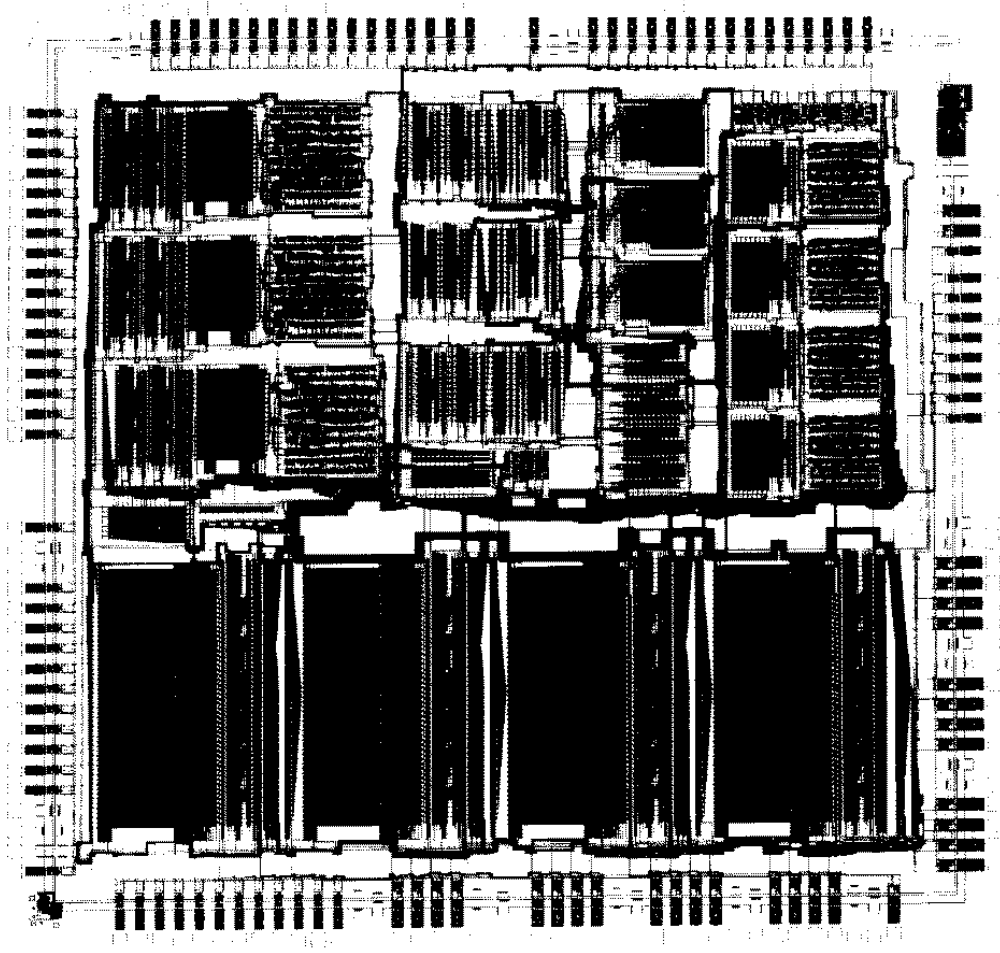
GRAPE-2 の中身

- 8ビット演算とかは止めて普通に浮動小数点演算 (倍精度は最初と最後だけ)
- 40Mflops
- 天文台から開発費をいただいた
- 戒崎、伊藤、牧野

GRAPE-3(1991)



GRAPE-3 チップ



2 mm

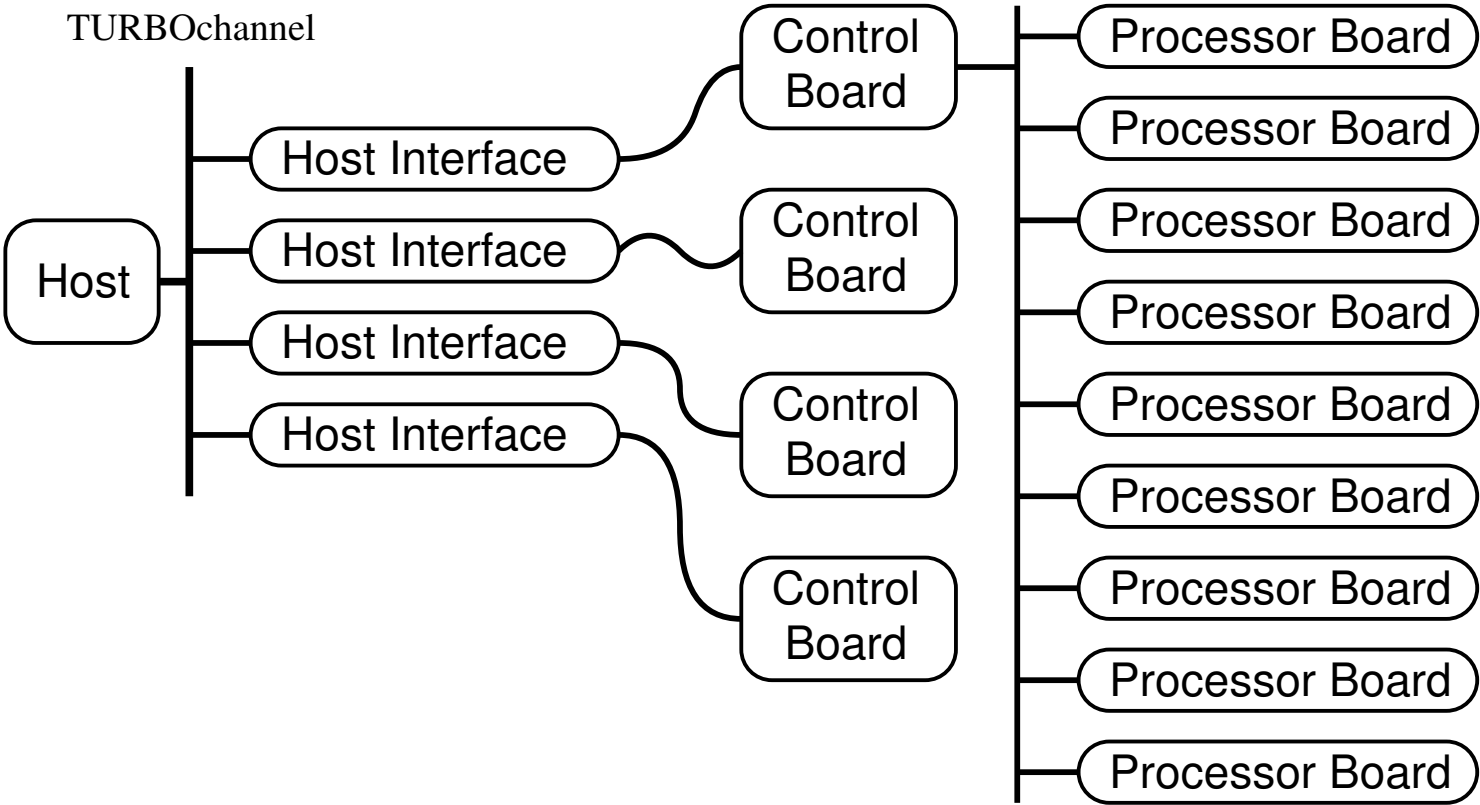
GRAPE-3

- 仕様決定、シミュレータ (C で記述) は牧野
- 論理設計以降は富士ゼロックス (橋本、富田)
- SCS Genesisil で設計
- ファブは NS. $1\mu\text{m}$
- ボードは奥村 (現在国立天文台)
- 科研費と山田科学振興財団？

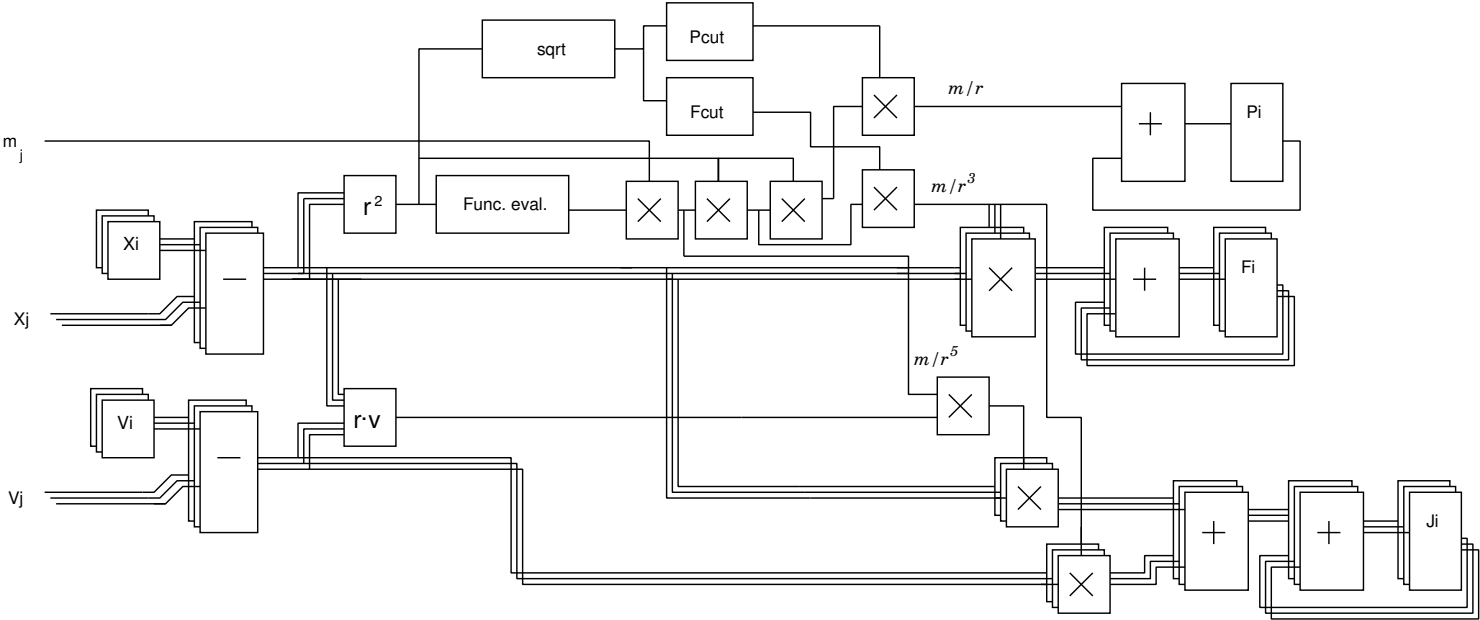
GRAPE-4(1995)



GRAPE-4 の構成

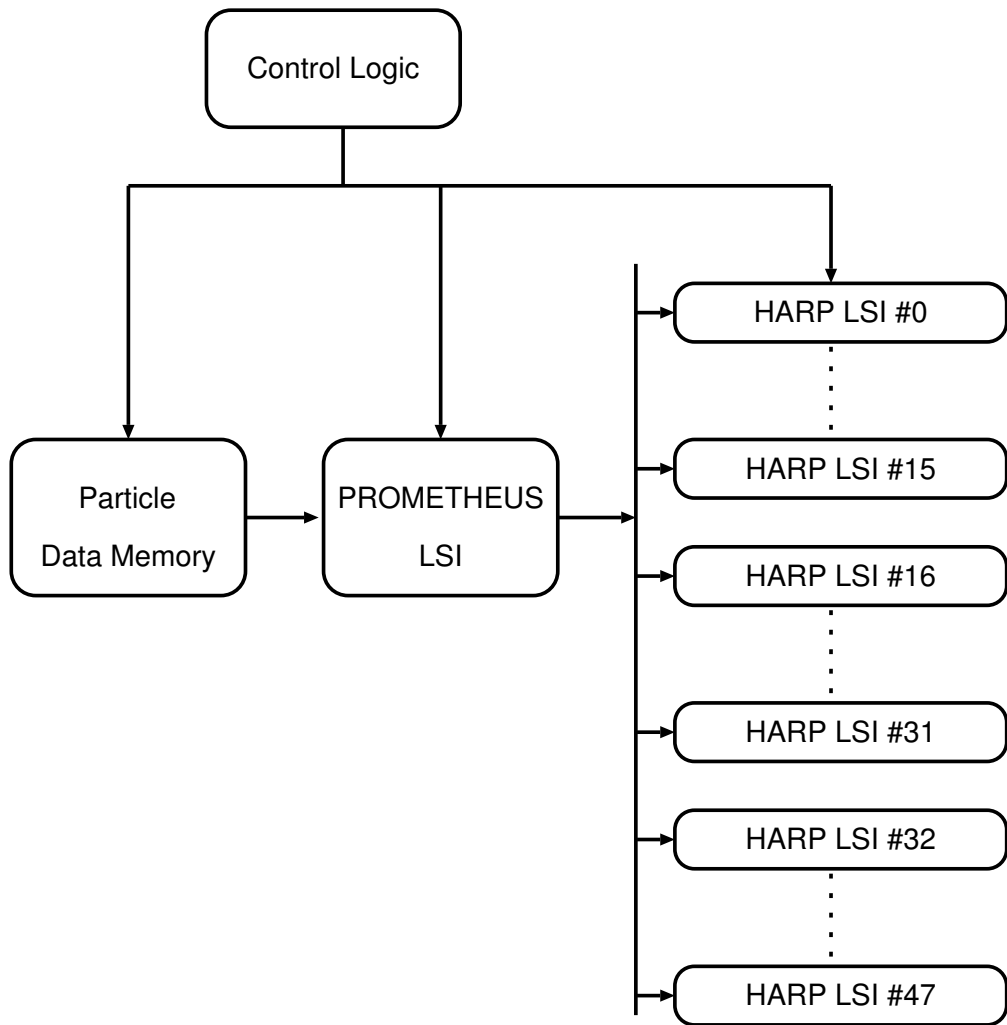


GRAPE-4 パイプライン



設計:泰地

GRAPE-4 演算ボード



多数のパイプライン
LSI がメモリユニット
を共有



ボードが単純になり、
集積度をあげられる

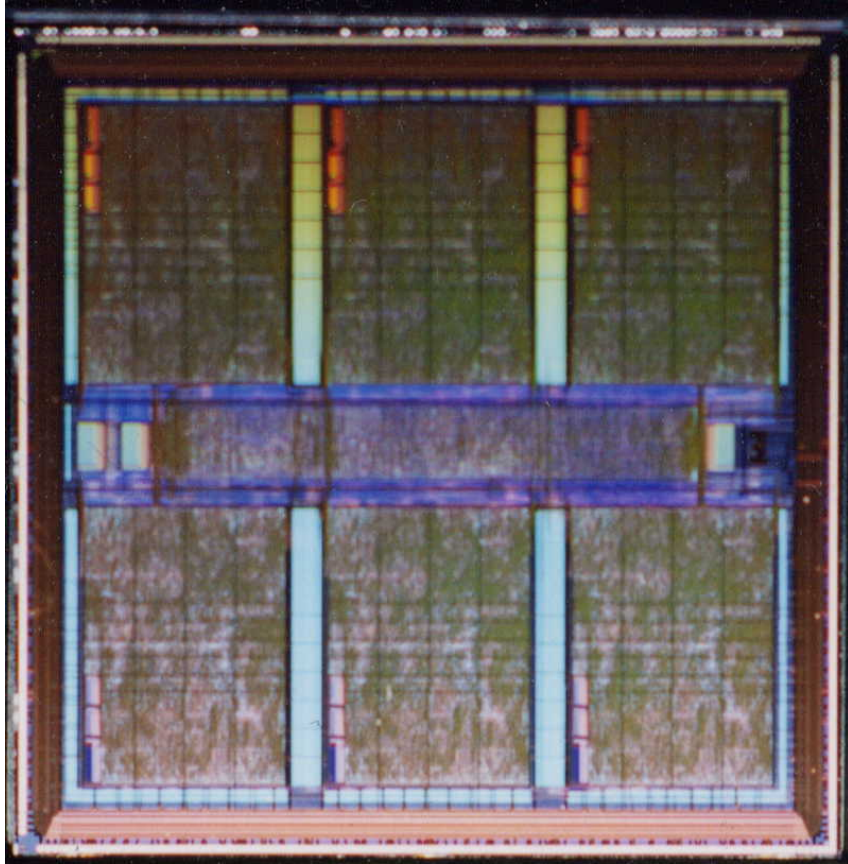
GRAPE-4 概要

- 48個プロセッサチップがのったボード36枚
- 1チップ 20 演算、32 MHz 動作で 640 Mflops
- LSI logic 1 μ m スタンダードセル
- プロセッサチップは泰地、「予測子」チップ牧野
- 特別推進研究。3億円弱

GRAPE-6(2001)

- プロセッサチップ
- プロセッサモジュール
- プロセッサボード
- ネットワークボード
- 全体

パイプライン LSI

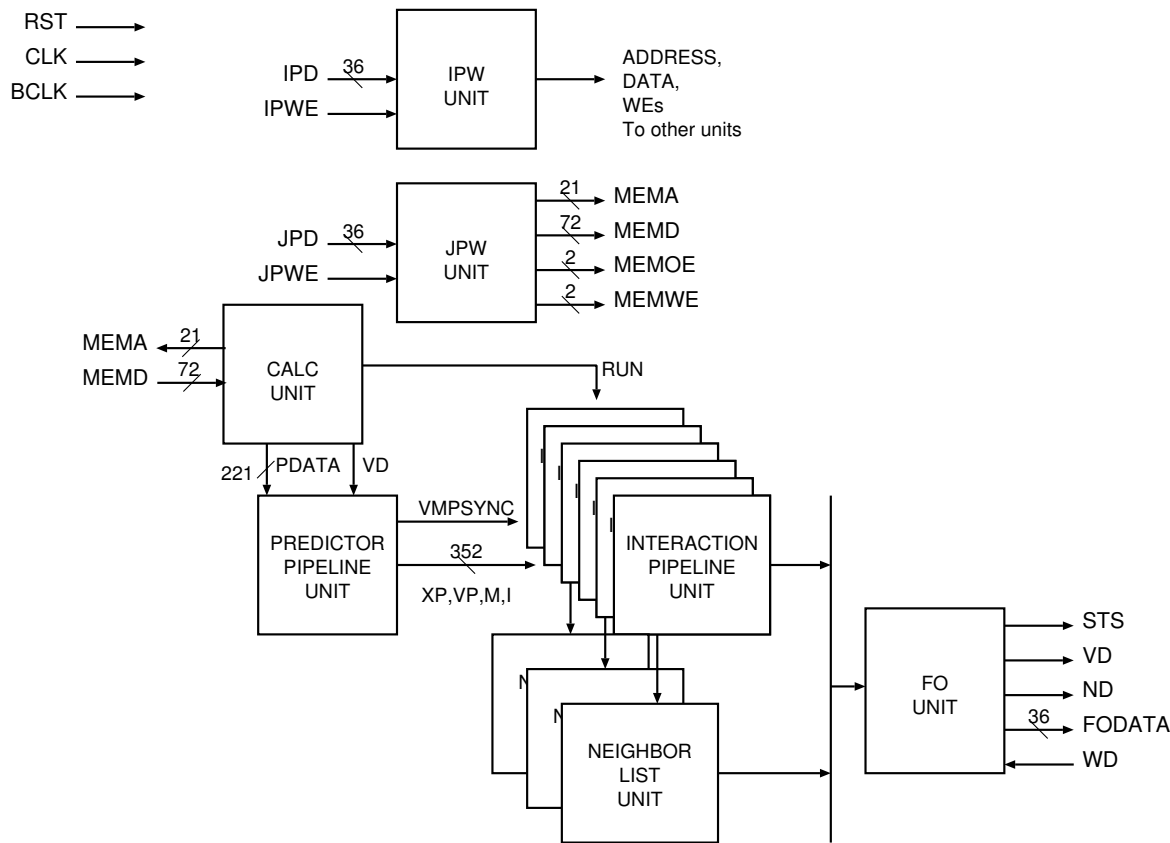


- 0.25 μm ルール
(東芝 TC-240, 1.8M
ゲート)
- 90 MHz 動作
- 6 パイプラインを集積
- チップあたり 31 Gflops

2006 年のマイクロプロセッサと 比べてみる

	GRAPE-6	Athlon FX-62
デザインルール	250nm	90nm
動作クロック	90MHz	2.8Gflops
ピーク性能	32.4Gflops	11.2Gflops
消費電力	10W	95W
1W あたり性能	3.24Gflops	0.12 Gflops

パイプライン LSI 詳細



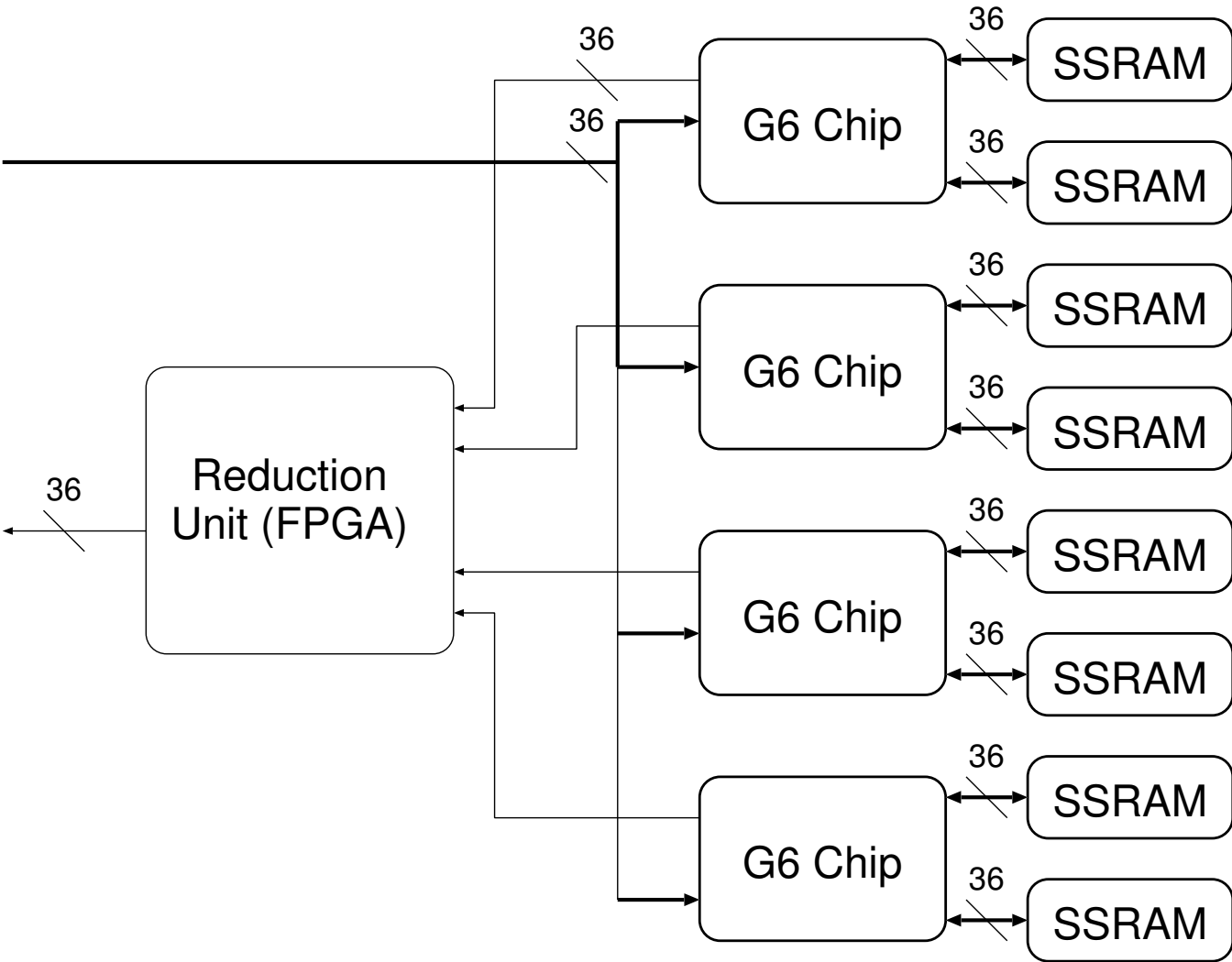
GRAPE-4 プロセッサボードの全機能を集積

- ホスト IF
- メモリ IF
- パイプライン本体
- 制御回路

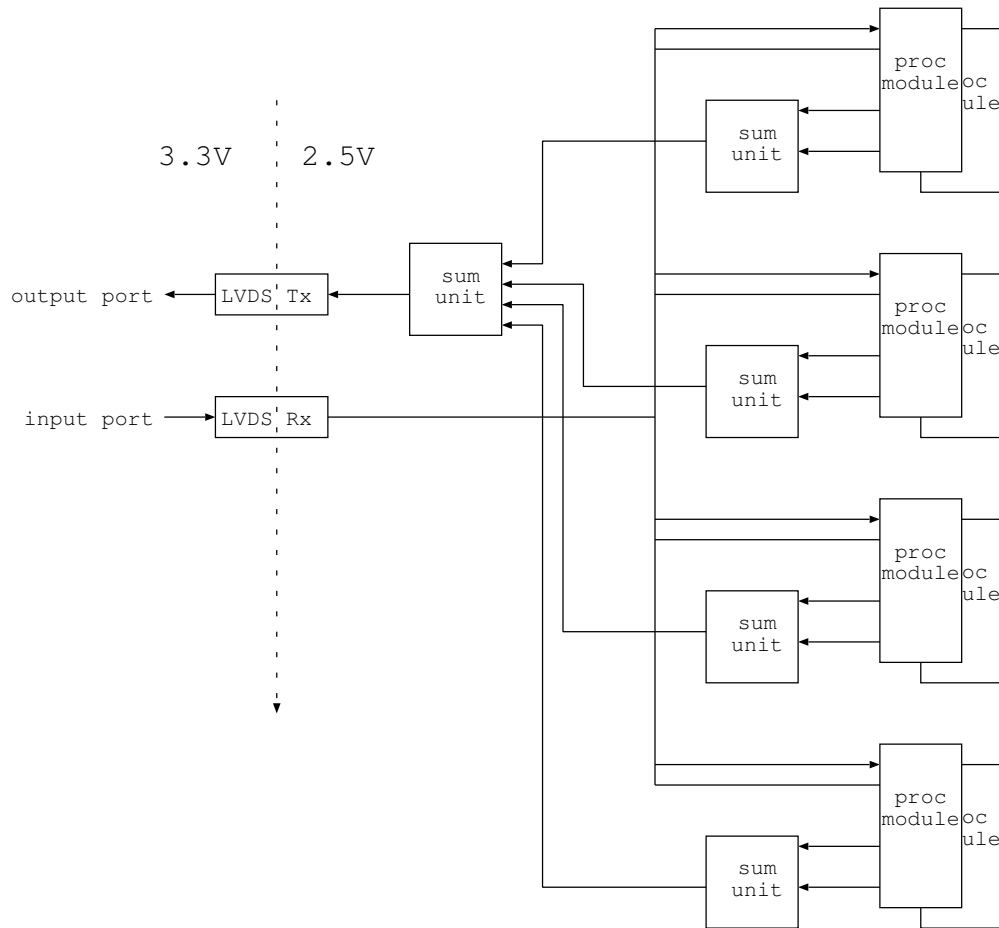
GRAPE-6 processor module



GRAPE-6 processor module

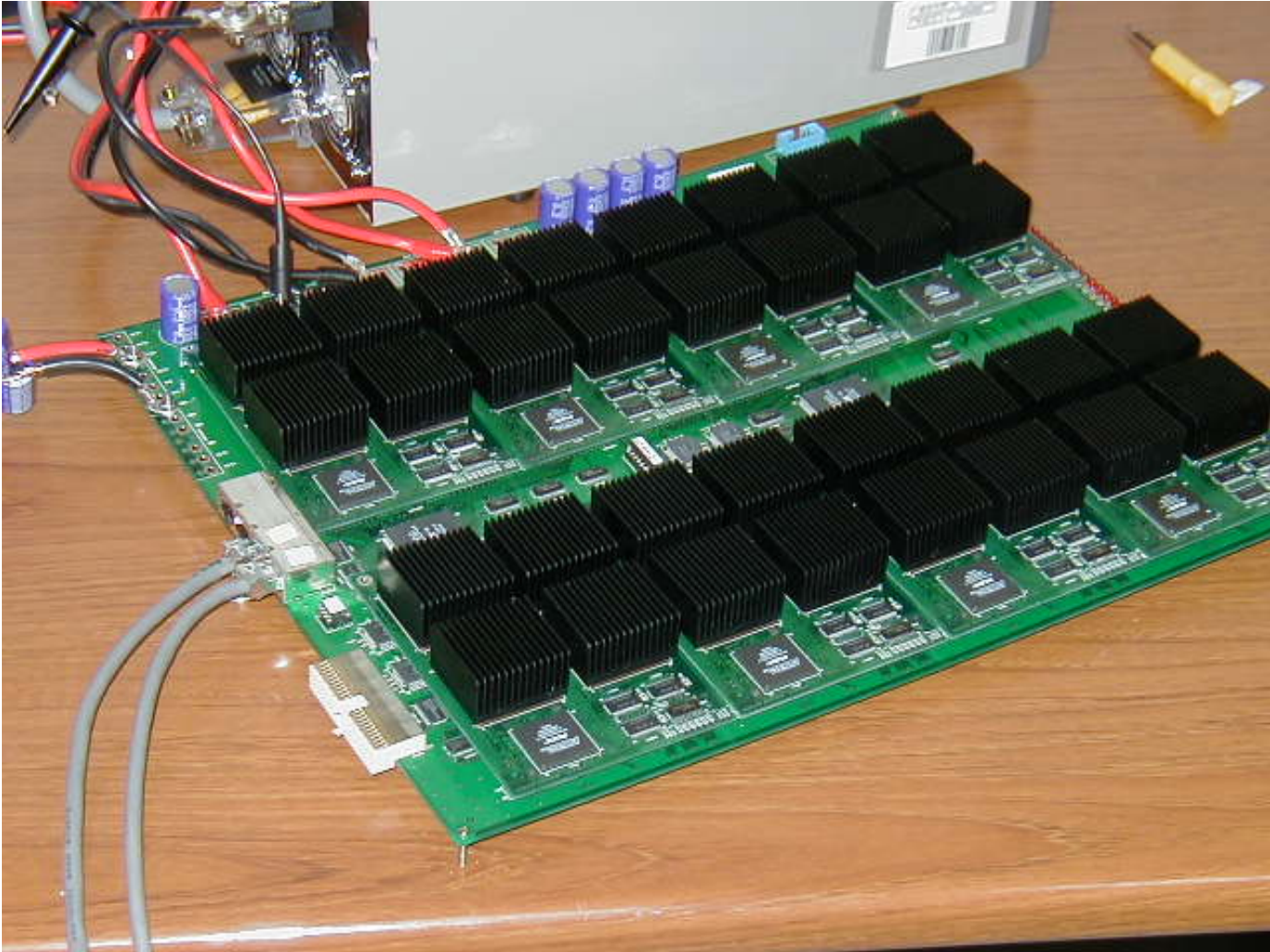


GRAPE-6 Processor board

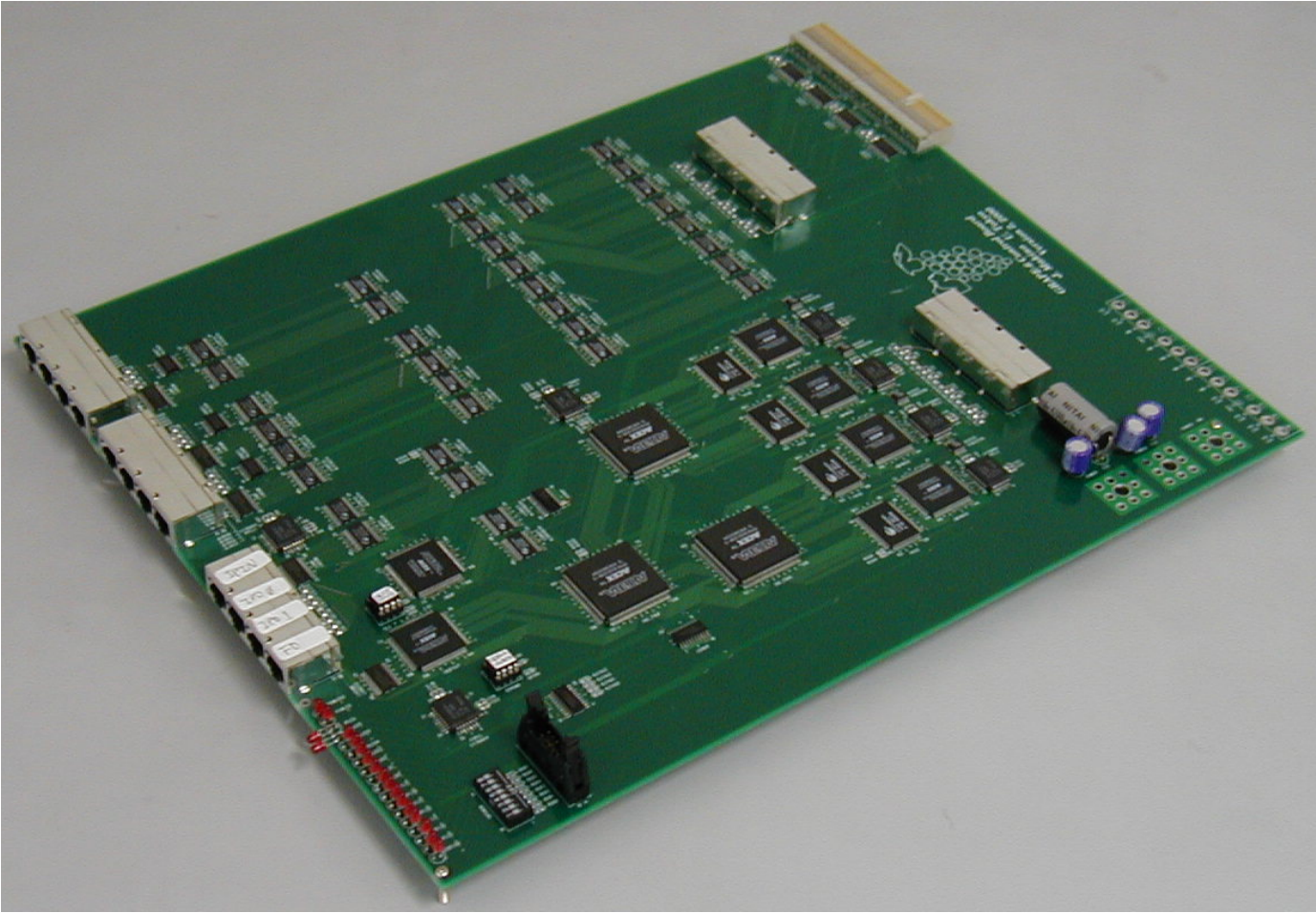


- ボード 1 枚に 32 チップ
- セミシリアル (LVDS) インターフェース (350MHz clock, 4 wires)

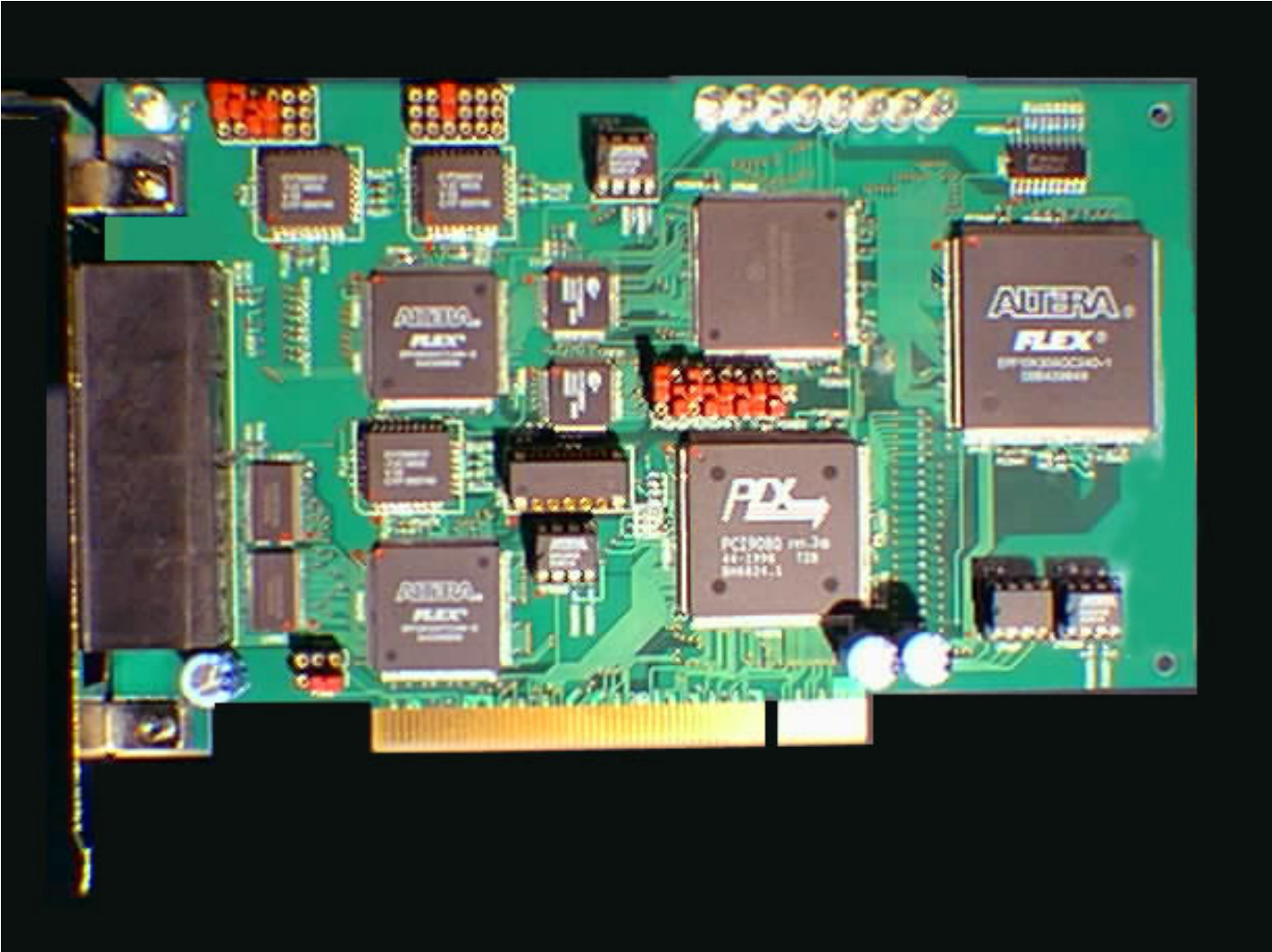
GRAPE-6 processor board



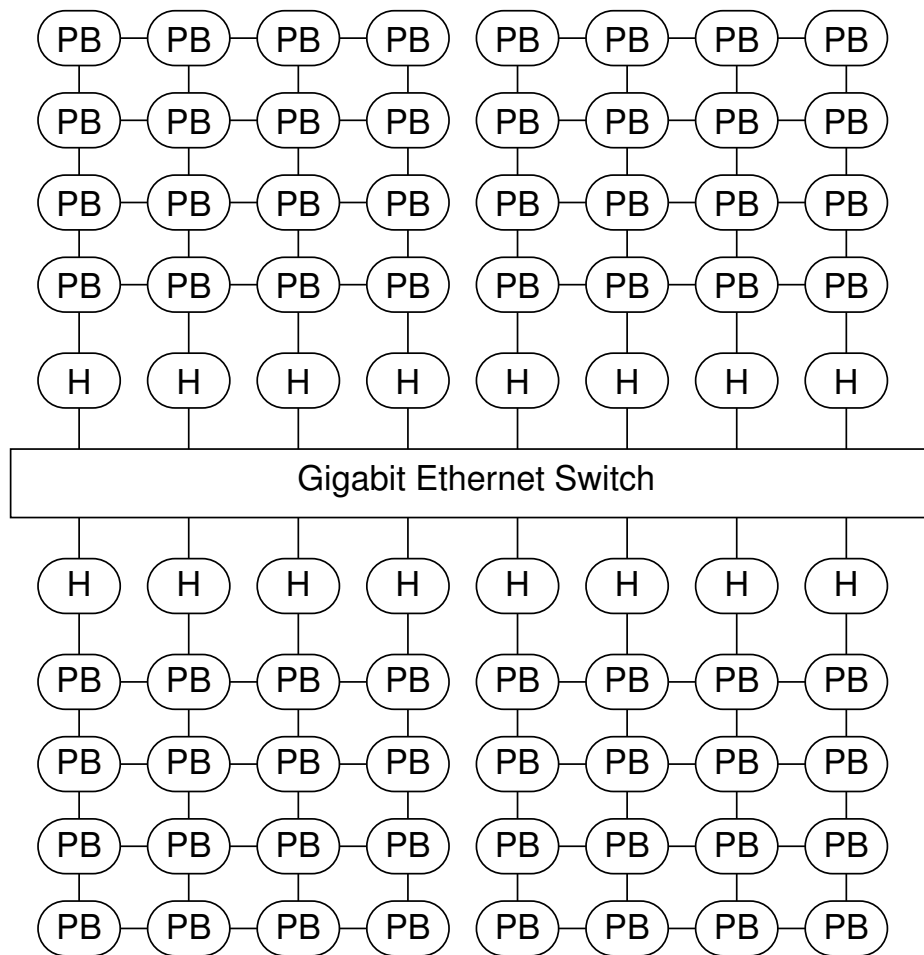
GRAPE-6 network board



GRAPE-6 host interface board



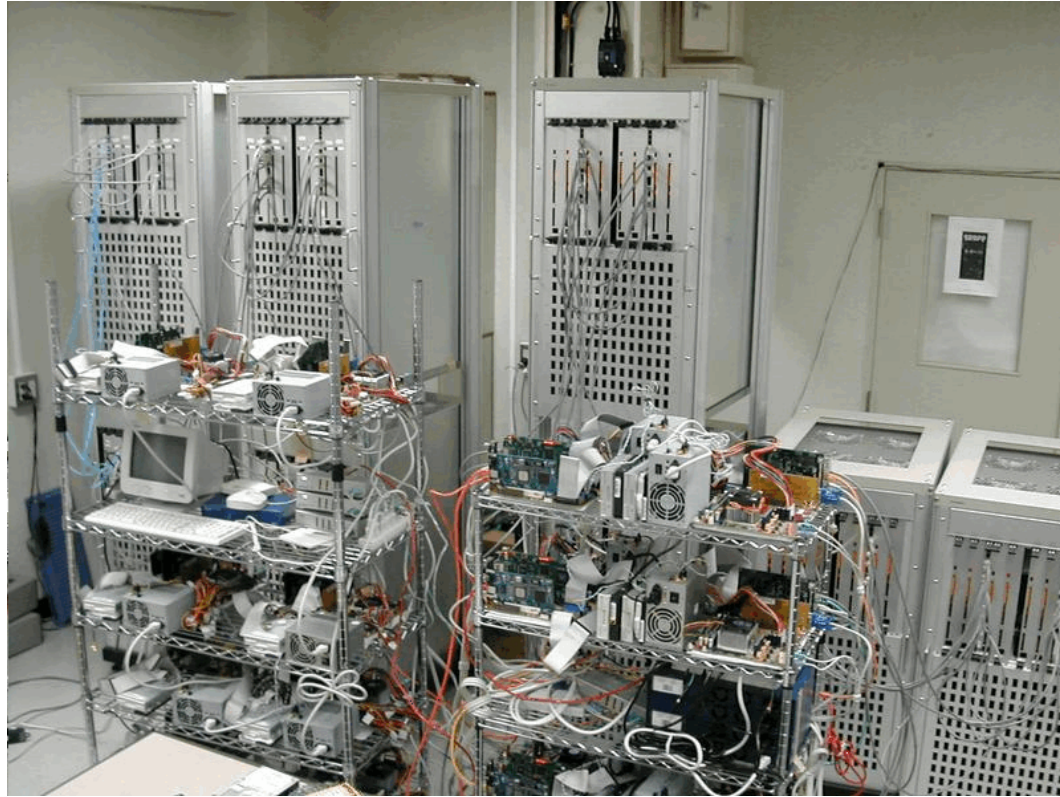
The full 64 Tflops GRAPE-6 system



- ホスト 4 台、プロセッサボード 16 枚のブロック
- 4 ブロックで全体システムを構成。結合は GbE

専用ネットワークと汎用ネットワークの組み合わせ。

The 64-Tflops GRAPE-6 system



2002年現在の 64
Tflops システム

4 ブロック

16 ホスト

64 プロセッサボード

GRAPE-6 の開発体制

- 予算は「未来開拓」。研究費バブルの頃、、、
- 筑波大学と分担して「次世代超並列計算機開発」
- 東大分予算およそ 5 億
- 東大分代表は牧野。LSI は牧野・福重で設計。ボードは一部大学院生 (古賀君)

他の GRAPE 型機械

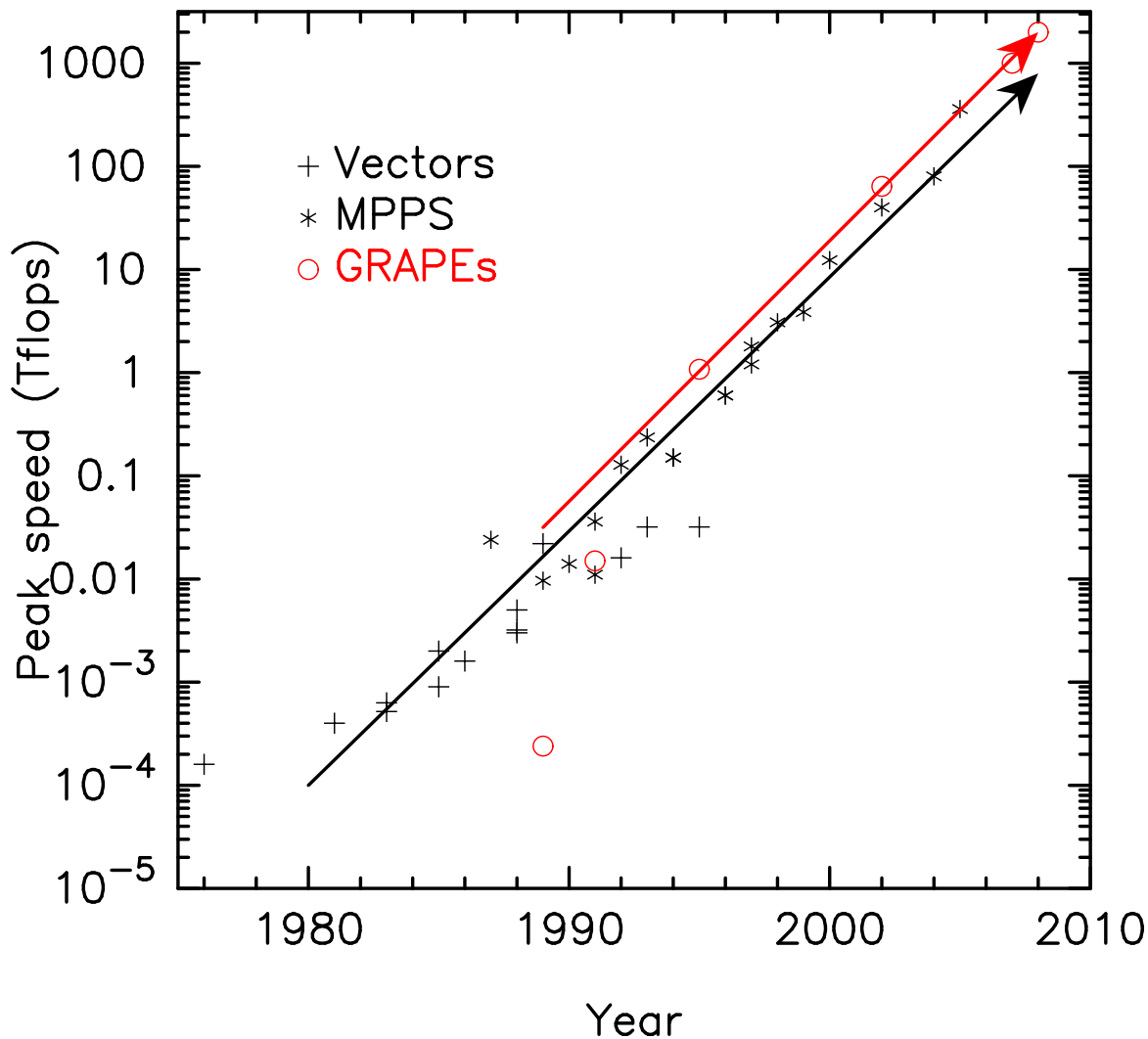
- 1991 GRAPE-1A : GRAPE-1 の細かい改良。設計: 福重
- 1992 GRAPE-2A : 最初の MD 用 GRAPE
設計:伊藤・福重
- 1992 HARP-1: 小久保君設計。 Hermite 公式用
- 1993 GRAPE-3A: 商業版
- 1996 MD-GRAPE: 最初の MD 用 GRAPE チップ
チップ設計:泰地
- 2001 MDM (MDG2): 理研・戎崎グループによる。 75T

- 2006 PE (MDG3): 理研・泰地グループによる。 1P
- 1992- MD-Engine: 富士ゼロックス、大正製薬(現在 NEC)

他の GRAPE 関係専用計算機

- 1991 DREAM: 大規模偏微分方程式計算「専用」計算機。
ハードディスクを主記憶に、という発想。
ディスク 1 台の試作程度まで。大野、牧野、戎崎。
- 1993 ZEBRA : Radiocity 法専用計算機。成見、戎崎
- 1995 General: LU 分解専用計算機。市販チップで構成。
清木、戎崎、泰地、牧野。
- 2002? MACE: LU 分解専用計算機。泰地、戎崎

ピーク性能の進歩



GRAPE-4 以
降、完成した時
点で世界最高速
を実現

商業版 GRAPE

- GRAPE-3 から商業版
- GRAPE-6 を購入した機関

American Museum of Natural History

Drexel University

Indiana University Rochester Institute of Technology

Rutgers University

Rochester Institute of Technology

University of Michigan

University of California

McMaster University

The University of Cambridge

University of Edinburgh

Observatoire Astronomique Marseille-Provence(OAMP)

Astronomisches Rechen-Institute (ARI)

Ludwing-Maximillans University

Max-Planck-Institute für Astronomie

GRAPE-6 を購入した機関 (つづき)

University of Bonn

University of Mannheim

Holland University of Amsterdam

Nanjing University

Citec Co., Ltd

Gunma Astronomical Observatory

Hokkai-Gakuen University

Kansai University

Kyoto University

National Institute for Fusion Science (NIFS)

National Astronomical Observatory of Japan

Osaka University

The University of Tokyo

Tokyo Institute of Technology

University of Tsukuba

約 30 機関、 60Tflops。 MDGRAPE-2 も同様

GRAPE-6 の次は？

MDGRAPE-3 の次: MDGRAPE-4, 20Pflops@2010

そもそも MDGRAPE-3 にあたるものは？ → GRAPE-DR

GRAPE-DR 計画とは何か？

「基本的には」次期 GRAPE 計画

- 2004年度から5年計画
- 目標ピーク性能: 2 Petaflops
- チップ数 4096
- 単体チップ性能 0.5Tflops

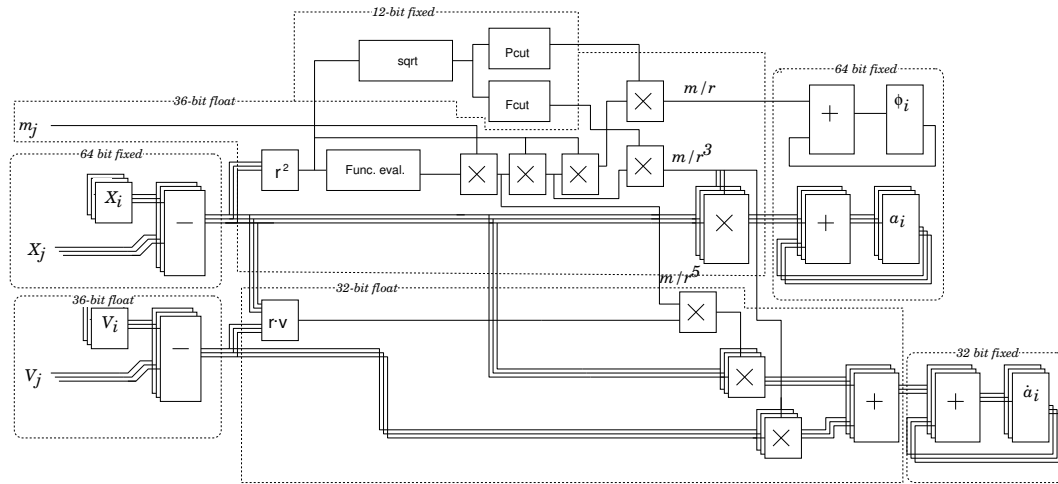
と、これだけなら今までの GRAPE が速くなっただけ。

実際のアーキテクチャ: 今までの GRAPE とは全然違う

- なぜ違うか
- それで何ができるか

GRAPE とはどんなものだったか？

プロセッサアーキテクチャ



重力相互作用計算の順番に演算器を並べたパイプライン

- シリコンの利用効率は極めて高い
- 動作クロックも上げやすい

- アプリケーション限られる。多種類作るのはリソースがかかり過ぎる

「次期 GRAPE」の実際的な問題

天文だけ (しかも理論だけ (しかも N 体だけ)) でもらうにはチップ開発コストが大き過ぎる

チップ開発費

1990 $1\mu\text{m}$ 1500万円

1997 $0.25\mu\text{m}$ 1億円

2004 90nm 3億円以上?

2006 65nm 10億円以上

ある程度広い応用を持つものでないと予算獲得が難しい

ALMA でも関連器は FPGA、、、

ではどうするか

1. やめる

ではどうするか

1. やめる

2. 安くあげる方法を考える

ではどうするか

1. やめる
2. 安くあげる方法を考える
3. なんかお金を取る方法を考える

ではどうするか

1. やめる
2. 安くあげる方法を考える
3. なんかお金を取る方法を考える

GRAPE-DR では (3) を選択

基本的な考え

- チップに演算器を 2000 個くらい入れる
- それを (GRAPE が得意なタイプの問題に対しては) ある程度のプログラム可能性をもった形で使う。GRAPE のようなハードワイヤードなパイプラインにはしない。

もうちょっとそれらしく言うと:

- 応用に特化し、多数の演算器を 1 チップに集積、並列動作させて高い性能を得た専用計算機の特徴を生かす
- しかし広い応用範囲を実現する

そんなことができるか？が問題

多数の演算器を詰め込む方法

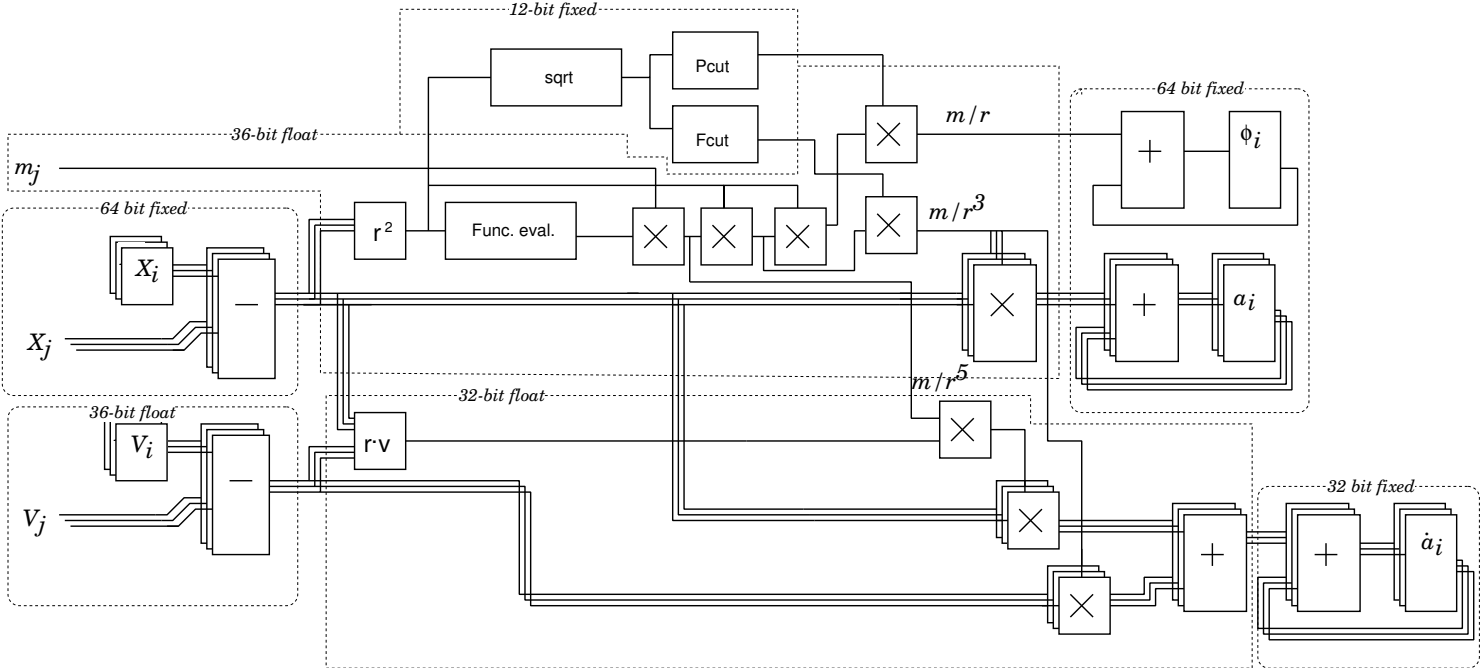
境界条件: メモリバンド幅は増やしたくない(システムコストはほぼメモリバンド幅で決まる)

可能な方策

1. GRAPE 的専用パイプラインプロセッサ
2. 再構成可能プロセッサ
3. SIMD 並列プロセッサ

GRAPE的専用プロセッサ

これでよければ別に何も考えることはない。



再構成可能プロセッサ

FPGA ベース

- 任意のロジックを実現可能
- 集積度、速度は大きなペナルティがある
- 精度が低くてもいい応用には向く

いわゆる「動的再構成可能プロセッサ」

IPFlex DAP/DNA 等

- 8-32 ビットの単純な ALU を多数集積
- その間をプログラマブルな配線でつなぐ
- 集積度、速度はやはり大きなペナルティ

SIMD 並列処理

パイプラインプロセッサをやめにして、「プログラム可能なプロセッサ」を沢山載せる。

SIMD (Single Instruction Multiple Data): 全プロセッサが同じ命令を実行

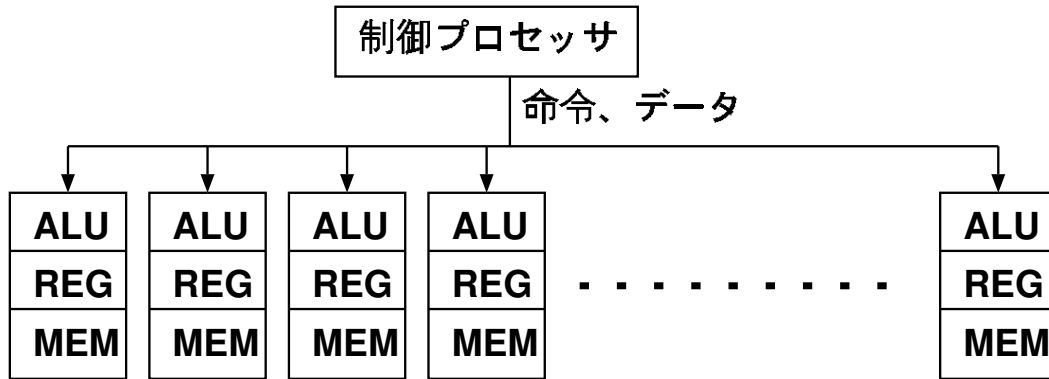
基本的には、全プロセッサがソフトウェアで **GRAPE** をエミュレーションする。

SIMD 並列処理って？

- 古典的 SIMD 並列計算機
- SSE、MMX とかの SIMD 拡張命令
- **GRAPE-DR における SIMD**

古典的SIMD 並列計算機

Illiac IV, Goodyear MPP, ICL DAP, TMC CM-2,
MASPAR MP-1



1960年代に発生、80年代に絶滅

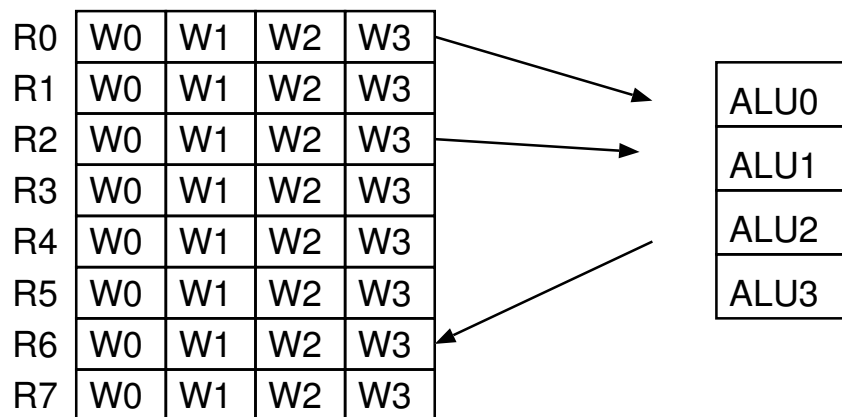
半導体技術の向上に対応できないアーキテクチャ: 計算速度とメモリアクセス速度が比例する必要あり。

メモリ階層をつける: プロセッサが複雑になりすぎて SIMDの意味が無くなる。

SIMD 拡張命令

Pentium III, IV が有名

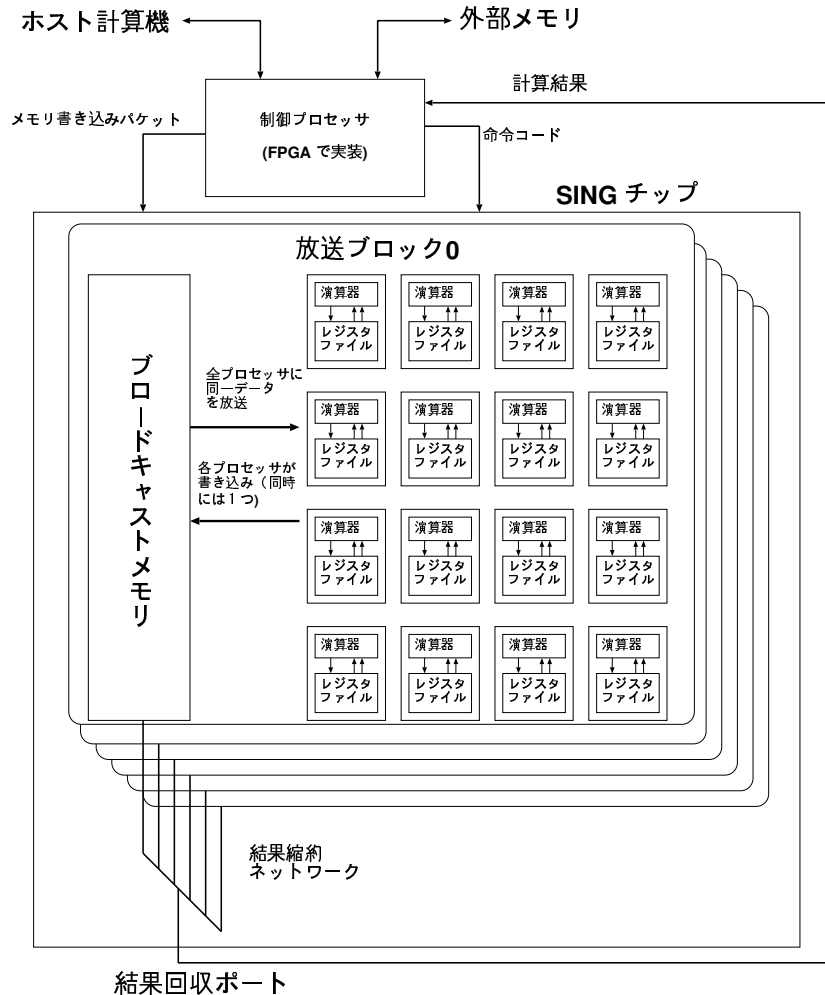
128 ビットなり 64 ビットのデータを 4 語に区切って、それぞれの要素に対する演算を 4 個の演算器で同時に処理



1つのプロセッサの中の話: キャッシュとデータをやりとり

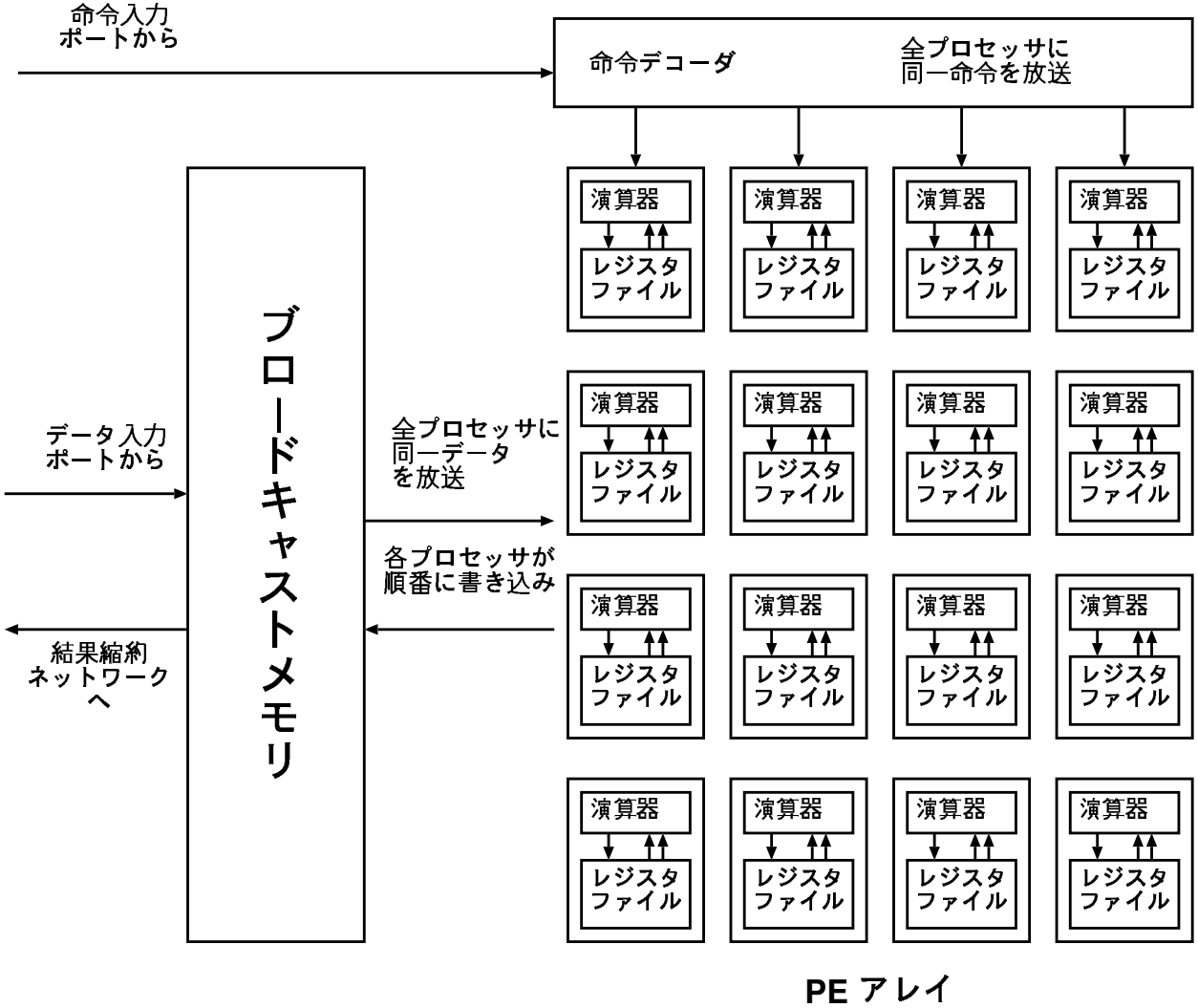
並列度 4 程度が限界? それ以上増やすとキャッシュの速度が追いつかなくなる。

GRAPE-DR における SIMD



- 非常に多数のプロセッサエレメント (PE) を 1 チップに集積
- PE = 演算器 + レジスタファイル (メモリをもたない)
- チップ内に小規模な共有メモリ (PE にデータをブロードキャスト)。これを共有する PE をブロードキャストブロック (BB) と呼ぶ。
- 制御プロセッサ、外部メモリへのインターフェースを持つ

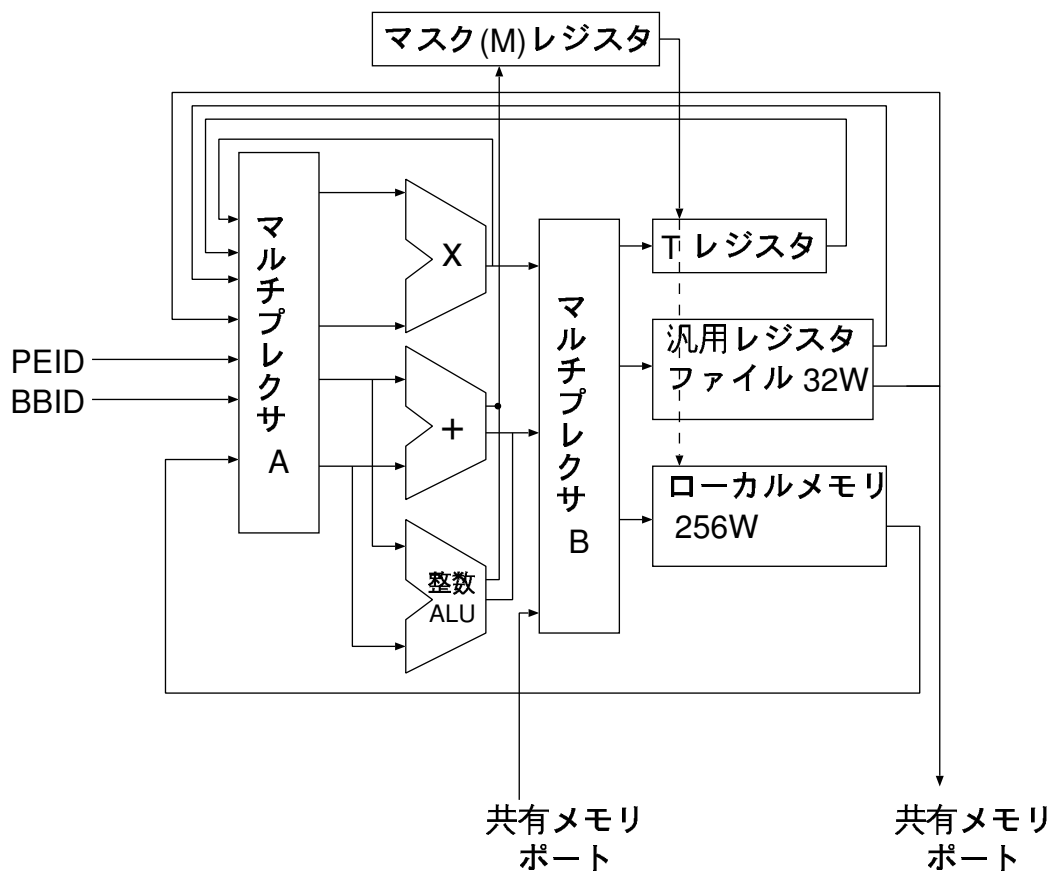
ブロードキャストブロック



各プロセッサは同じデータをブロードキャストメモリから受け取る

このブロックがチップ内には沢山ある。答はブロックにまたがって合計することもできる。

PE の構造



- 浮動小数点演算器
- 整数演算器
- レジスタ
- メモリ (256語), K とか M ではない。

PEの詳細

データ形式

単精度浮動小数点: 36 ビット (符号 1、指数 11、仮数 24)

倍精度浮動小数点: 72 ビット (符号 1、指数 11、仮数 60)

36/72 ビット固定小数点数

演算命令

乗算は単精度のみ (倍精度のための部分積をサポート) 倍精度乗算を 2 サイクルでするために 25×50 ビットの乗算器

整数演算、加減算は倍精度のみ (メモリ/レジスタからの読出し/格納時に単・倍変換ができる)

特殊な浮動小数点命令: 仮数を正規化しないまま演算を続け

る。これにより、演算順序によらないで結果が同じになることを保証する (GRAPE-6 の積算と同様)

普通に正規化もできる (こっちがデフォルト)

PEの詳細(続き)

- パイプラインは8ステージ。
- 基本命令は4データに対するベクトル命令。4サイクルに1回しか命令ははまらない。
- Tレジスタのみ直前の命令の実行結果を利用可能。
- Tレジスタはアドレスレジスタになる(間接アクセス)

サポートする命令等は基本的には昔のSIMD計算機、例えばCM-2, MasPar MP-1 なんかとあまり変わらない。但し、PEがはるかに強力になっている。

アプリケーションに対する考え方

- Memory Wall が問題にならないようなアプリケーションのみを対象にする
- 3つの型に特化
 - 散乱実験型
 - 粒子間相互作用型
 - 密行列型
- 可能ならばアプリケーションを書き換える

散乱実験型

- 多数の PE が、独立にイベントを計算
 - イベント間の相互作用はない、または非常に少ない
 - * レイトレース計算：光学部品（レンズ、導光版）設計
 - * 放射線伝播のモンテカルロ計算：検出器設計
 - * 3体問題:連星と単独星の遭遇、微惑星同士の遭遇
- “Embarassingly Parallel” とほぼ対応
- 古典的 SIMD 機と同様の振る舞い:
 - Goodyear MPP, ICL DAP, TMC CM-1/2, Maspar MP-1/2
 - 極端に少ないメモリ
 - PE 間通信が遅い
- 計算速度と通信速度の比:
 - 散乱実験の計算がどれだけ複雑かで決まる

粒子間相互作用型

$$f_i = \sum_j f(x_i, x_j)$$

- 他の「粒子」との「相互作用」を縮約。
 - 全ての相互作用を並列に計算可能
 - 同じ「粒子」のための計算結果を高速に縮約する必要
- 計算手順
 - PE に相互作用を受ける粒子をロード
 - 相互作用を及ぼす粒子をロード
 - 計算機終了したら結果を縮約しながら回収

- 計算速度とチップ外への通信速度の比:
相互作用を及ぼす粒子数に比例

密行列型

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

- 計算手順

- 行列が PE に収まるところまで分割。それから
- 行列 A の部分行列を PE にロード
- B の1列を分解して各グループにロード
- 各 PE で B の部分列と A の部分行列の積を計算
- 計算が終わったものから順次回収。グループ間で合計

- 計算速度・通信速度の比はチップ全体にロードできる行列のサイズに依存

- メモリサイズの平方根に比例して通信速度を落とせる

計算・通信比のまとめ

- 散乱実験型: アプリケーション依存
- 粒子間相互作用型: 粒子数依存
- 密行列型: オンチップメモリサイズ依存
- 設計におけるトレードオフ:
 - なるべくアプリケーション範囲を広く
 - * メモリを多く、バンド幅を広く → コスト増
 - コストを圧迫しないようにバランスを考える必要あり
- 実際の設計では密行列型の要求がもっとも厳しい

GRAPE-DR の開発体制

- 振興調整費。代表は東大の平木さん (情報理工学研究科)
- 予算 年 3 億、5 年計画 (現在 3 年目)
- ネットワーク関係のハード、ソフト開発と GRAPE-DR プロセッサ開発の 2 つが柱。
- プロセッサの仕様策定は牧野が中心。シミュレータとかも。
- 物理設計は日本 IBM の名村さん (GRAPE-6 の時と同じ人)
- ボードは福重君
- ボードの FPGA の中身は藤野君 (M2)

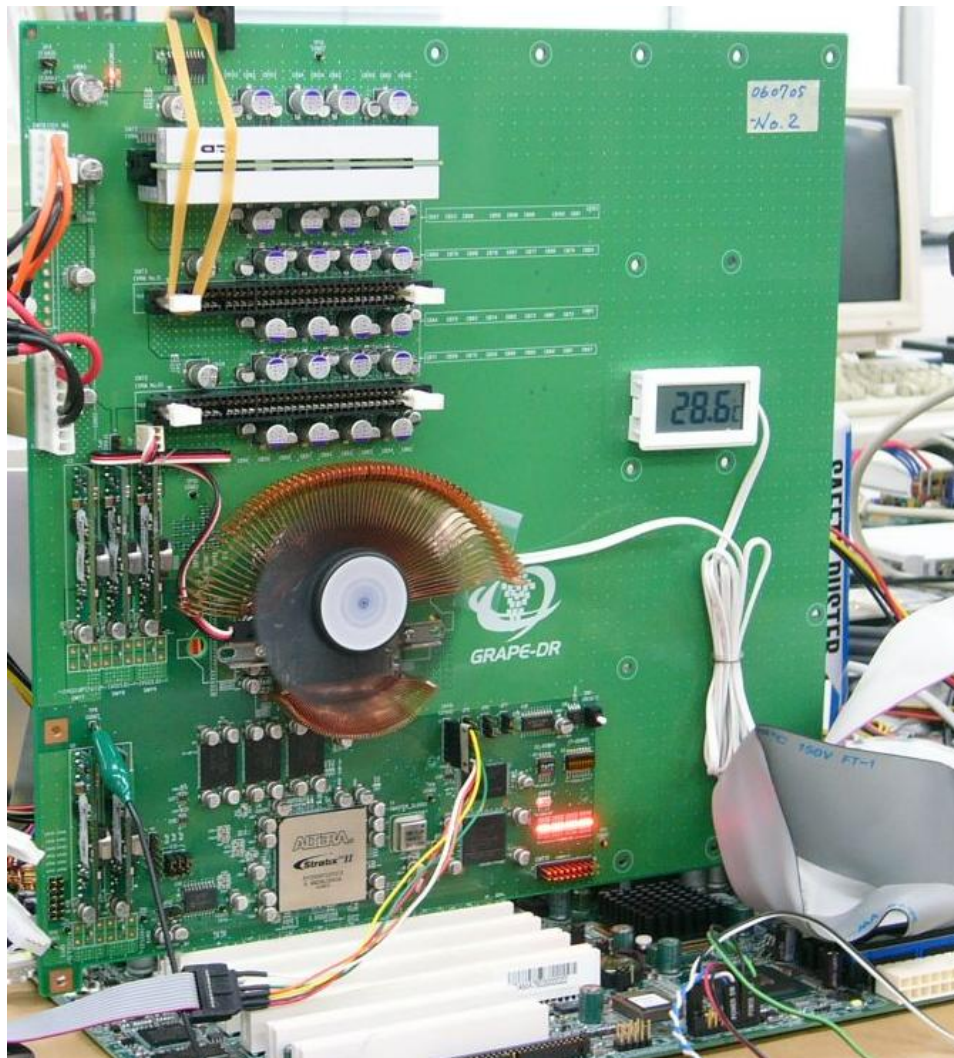
GRAPE-DR の開発状況



シミュレーションデータと同じものを供給して同じ答がでるところまで確認。

(これとは別ボードで) 500MHz 動作も確認、消費電力 25-50W 程度。

GRAPE-DR 別ボード



- こっちが「プロジェクト公式」
- 中身は殆ど同じ
- 何故か大きい
- 500MHz 動作まで確認済

原始的なコンパイラ

(中里 2006)

```
/VARI  xi, yi, zi, e2;  
/VARJ  xj, yj, zj, mj;  
/VARF  fx, fy, fz;  
  
dx = xi - xj;  
dy = yi - yj;  
dz = zi - zj;  
  
r2 = dx*dx + dy*dy + dz*dz + e2;  
r3i= powm32(r2);  
ff = mj*r3i;  
fx += ff*dx;
```

```
fy += ff*dy;
```

```
fz += ff*dz;
```

これから GRAPE 並のこをアセンブラ、インターフェイスライブラリを生成。

基本的なアイデアは PGR (FPGA を使った PROGRAPE 用コンパイラ、濱田 D 論 2006) と同様

GRAPE-DR の次

- 「京速計算機」あるいは「次世代スーパーコンピュータプロジェクト」
 - 2006年度から5ヵ年計画
 - 10 Pflops
 - 総予算 1100億？
- GRAPE-DR のようなものが一部入るかもしれない。まだ開発実施本部の方針が定まらない。
- もしも入るとしたら総予算の 10% 以下程度。

「V-GRAPE 構想」

GRAPE-DR、 ClearSpeed との違い

- かなり大きなオンチップ DRAM をつける
- ある程度いろんなことを 高速にできそう
 - － 陽解法流体計算
 - － 構造解析
- PC クラスタ+加速ボード構成

“Versatile-GRAPE”

大雑把な性能推定

ピーク 20Pflops として

- 重力多体、分子動力学、第一原理計算
効率 30–50% (6–10 Pflops)
- 陽解法流体、有限要素法
効率 10–20% (2–4 Pflops)

他のアプローチとの比較

筑波大学の将来プラン

48Gflops、 15GB/s、 400,000 チップで 20PF

ピーク性能を同じにして比べると

- チップ数 $1/20$
- bisection bandwidth $1/2$
- ノード間接続総本数 $1/5$
- 総メモリ $1/3000$

トータルコスト、信頼性、消費電力にかなりの差？

メモリ沢山いる計算: 遅いメモリをうまく使う必要あり

開発体制とか

GRAPE はどんなふうに使ってきたか、ということ。

「作る」というのはどういうことか、にもよる。

- GRAPE-2A まで: 市販チップを使ってラッピング配線
(研究室の中で手で配線)
- GRAPE-3 以降: カスタム LSI 開発。プリント基板
(パターン設計から業者)

ボード設計

- GRAPE-3 まで: 74 シリーズ、小規模 PLD
- GRAPE-4 以降: CPLD, FPGA

基板上の信号速度

- **GRAPE-3: 20 MHz**
- **GRAPE-6: 100 MHz**
- **GRAPE-DR: 500 MHz**

開発メンバー

- GRAPE-1: 伊藤 (M1)、牧野 (D3)、戎崎 (A)
- GRAPE-1A: 福重 (B4)+ 上の3人
- GRAPE-2: 伊藤 (M2)、牧野 (A)
- GRAPE-3: 奥村 (A)、牧野 (A)、戎崎 (AP)
- HARP-1: 小久保 (M1)、泰地 (A)、牧野 (A)
- GRAPE-4: 泰地 (A)、牧野 (A)、戎崎 (AP)
- MDGRAPE-1: 泰地 (A)、福重 (D2)
- GRAPE-5: 福重 (A)、牧野 (AP)
- MDM: 成見 (D)、戎崎 (理研)

- GRAPE-6: 古賀 (M2)、福重 (A)、牧野 (AP)
- MDG3: 成見 (理研)、泰地 (理研)

GRAPE-4 以降開発人員が固定化 (高齡化ともいう)

固定化する要因

- LSI 開発が中心になった
- 開発プロジェクトの数が減った (GRAPE-4 以前: 年に3つ、GRAPE-4 以降: 数年に1つ)
- 使う技術がくるくる変わるので教育が困難

多分最大の要因は「開発プロジェクトの数」

小規模な開発で先端技術を使うものを設定していく必要がある。

東大本郷ではちょっと困難だった。天文台は？

最近の話題

- 星団と中間質量ブラックホール
- 銀河中心の恒星系力学

星団と中間質量ブラックホール

1. M82 の IMBH 候補
2. 合体シナリオ
3. 他のモデル？
4. 他の IMBH 候補
5. 普通の球状星団に IMBH はあるか？
6. まとめ

大質量ブラックホール形成の問題

観測的にギャップがあるのが問題: やはり完全に空中楼阁を作るのは(よほど物理が単純でない)難しい。

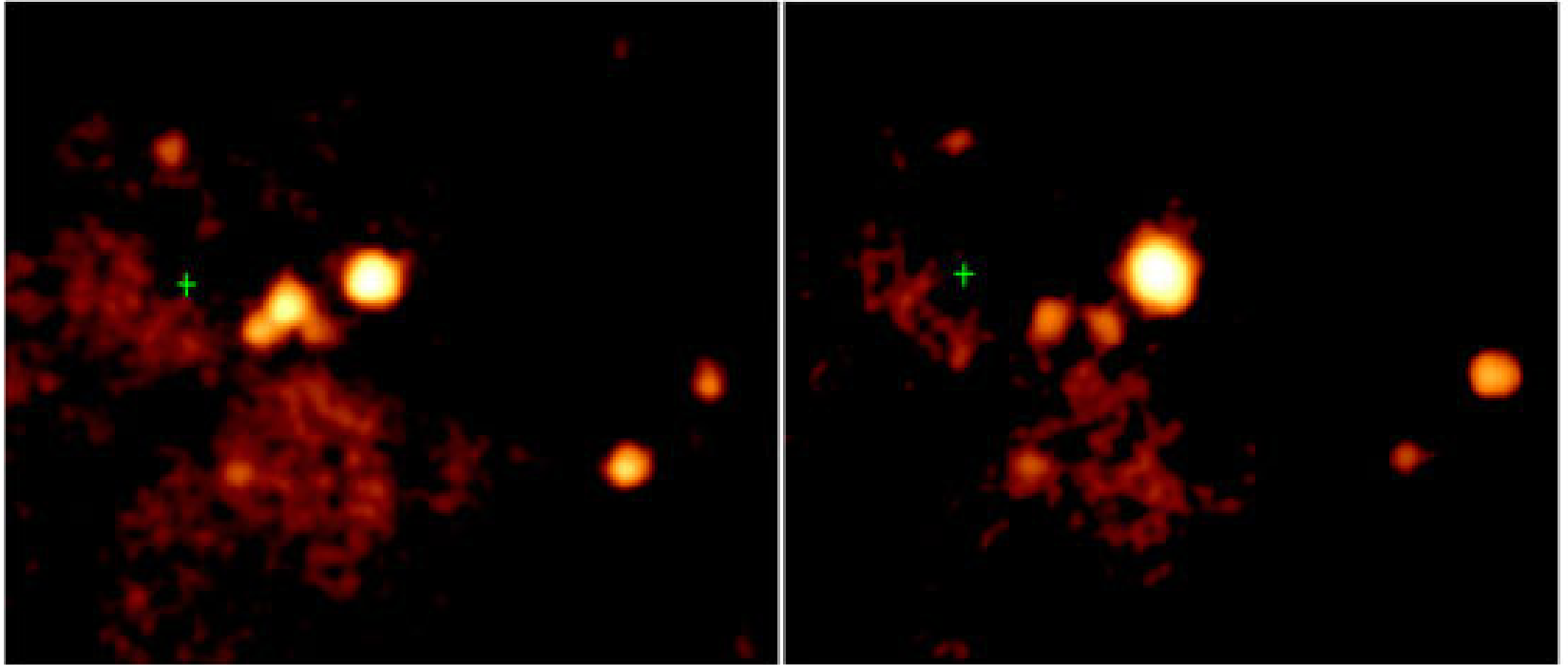
観測的なギャップ

- 恒星質量 BH $\sim 10M_{\odot}$
- 超大質量 BH $> 10^6 M_{\odot}$

中間は ???

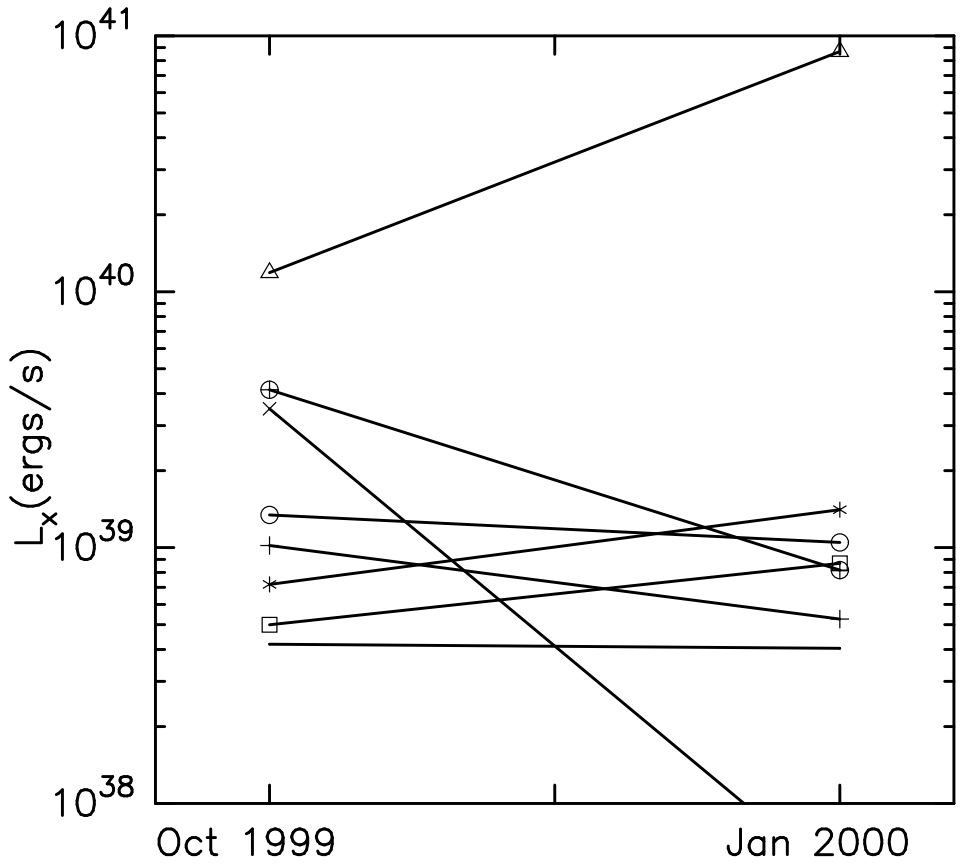
M82 の中間質量 BH 候補

Matsumoto *et al.* ApJL 547, L25



大きな時間変動を示す複数のソース

時間変動



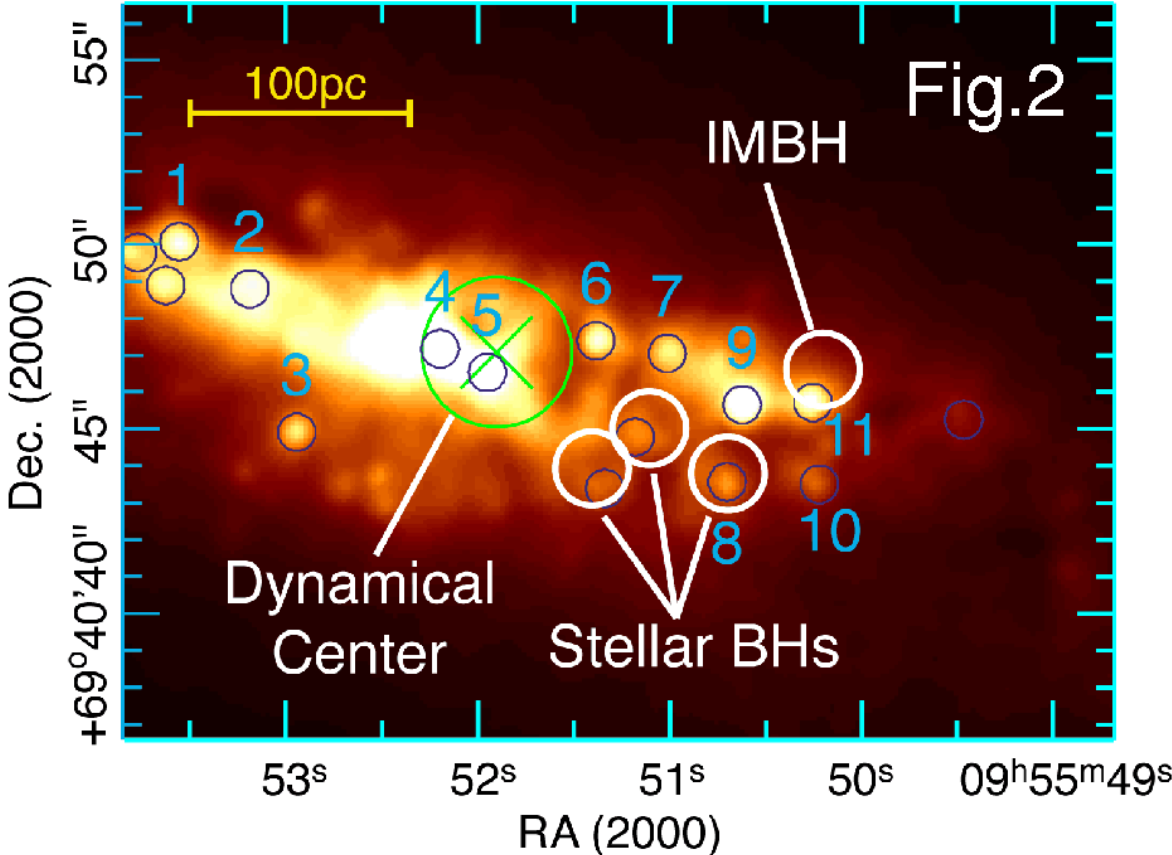
最大のソースが大きな時間変動

M82 IMBH (候補) の意味

- **最初の** 質量が $\gg 10, \ll 10^6$ の BH 候補天体
- エディントン質量 $\sim 700M_{\odot}$ = 最初の IMBH (intermediate mass BH).
- M82 の中心から 200 pcs くらい離れている: 銀河中心の BH そのものではない

赤外 カウンターパート

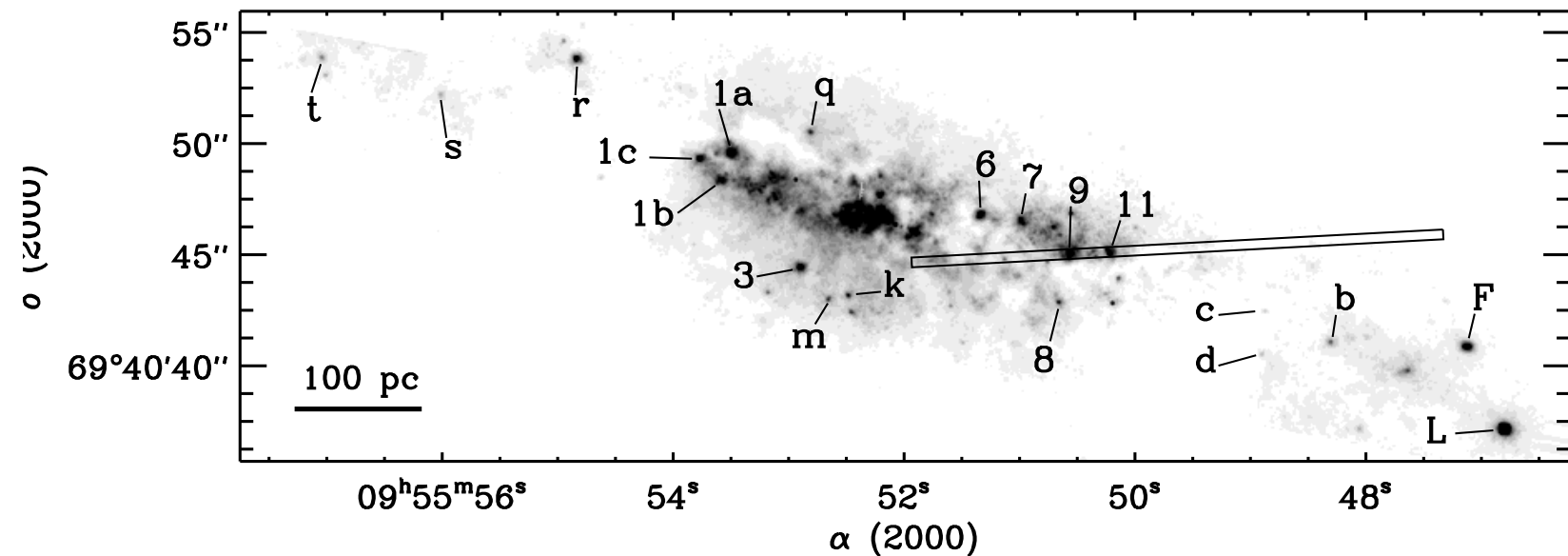
M82 のすばるによる観測 (K' band)



赤外 カウンターパート (2)

HST NICMOS/Keck NIRSPEC

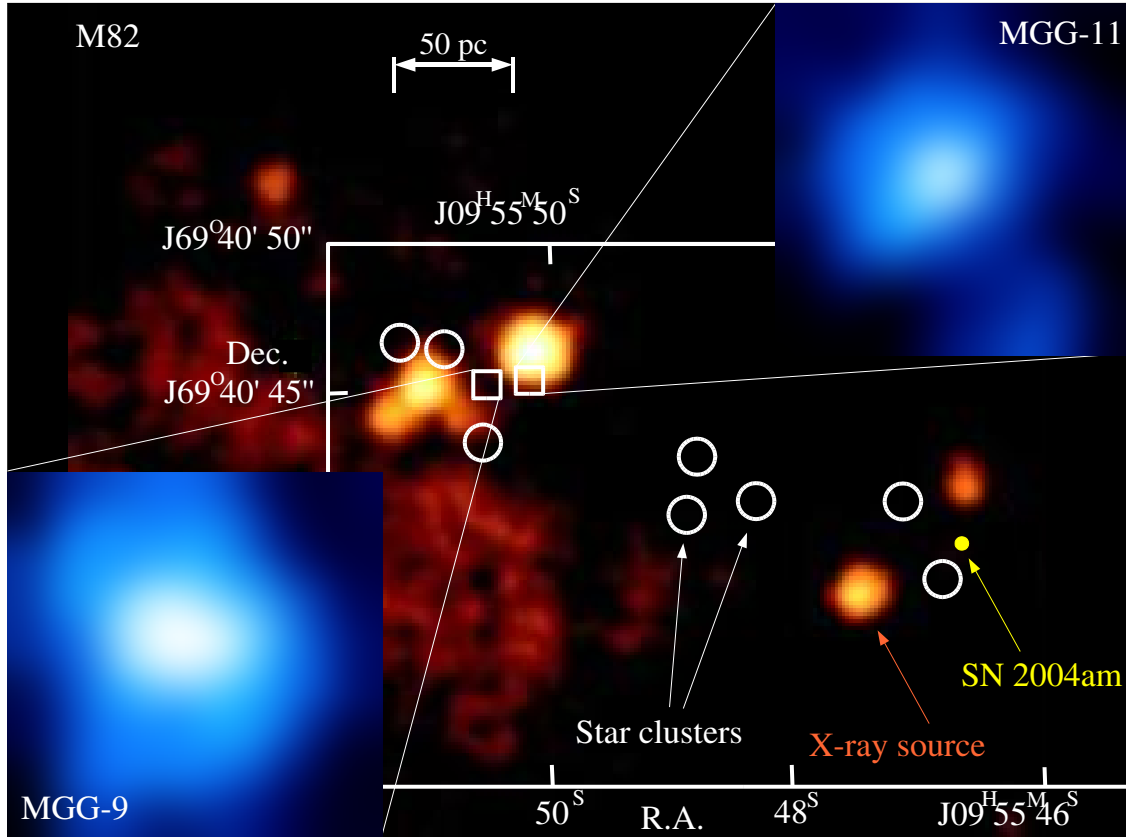
McCrady et al. (astro-ph/0306373)



スターバーストで最近出来た非常に若い星団。

赤外 カウンターパート (3)

位置の比較



まあ重なっている。

IMBH は星団の中にある？

(理論家の目には) IMBH は若くてコンパクトな星団の中にあるというのは「明らか」。

では、IMBH はどうやってできたか？

- 星団と同時に出来た？ (あんまりありそうにない)
- 星団の中で作られた。

ホスト星団の力学的な特徴

McCrady et al. 2003 (astro-ph/0306373)

Cluster #11 (MGG-11)

- $\sigma_r = 11.4 \pm 0.8 \text{ km/s}$
- half-light radius $1.2 \pm 0.17 \text{ pc}$
- kinetic mass $3.5 \pm 0.7 \times 10^5 M_\odot$
- Age $\sim 10 \text{ Myrs.}$

M/L が割合低い (Salpeter で合わせると lower cutoff が $1M_\odot$)

緩和時間非常に短い ($< 10 \text{ Myrs}$)

一つの可能なシナリオ

1. 星団の中心で星の暴走的な合体で大質量星ができる
2. この星のコラプスで IMBH (の種) ができる
3. この IMBH (の種) がさらに他の星と合体して成長

シミュレーション

Portegies Zwart et al., Nature, 2004/4/15 号

初期条件

- King model with $W_0 = 7-12$
- Salpeter IMF (as suggested by McCrady et al)
- Star-by-star simulation for MGG-11 (MGG-9 is scaled)

あんまりサイエンスではない話

いかにしてこの論文が Nature に載るにいたったか？

1. まず Simon が 1 ページくらいの概要を L. Sage に送った。
2. Sage からは「つまらんからいらぬ」みたいな返事が来た。
3. Simon が Sage に電話して談判した。
4. 何故か「ではレフェリーに回すから論文送って」という話になった。

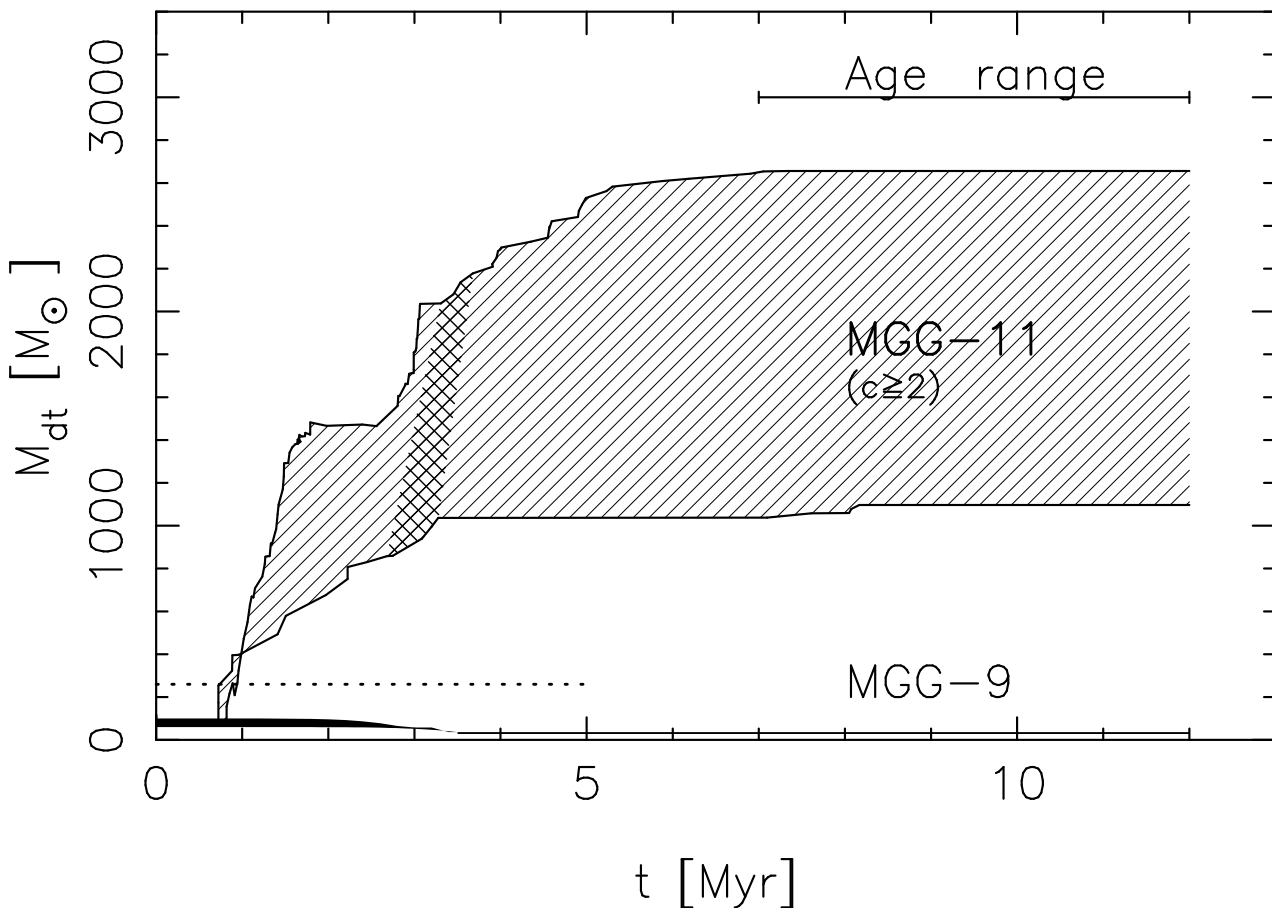
あんまりサイエンスではない話

いかにしてこの論文が Nature に載るにいたったか？

1. まず Simon が 1 ページくらいの概要を L. Sage に送った。
2. Sage からは「つまらんからいらない」みたいな返事が来た。
3. Simon が Sage に電話して談判した。
4. 何故か「ではレフェリーに回すから論文送って」という話になった。

オランダ人とは仲良くしよう

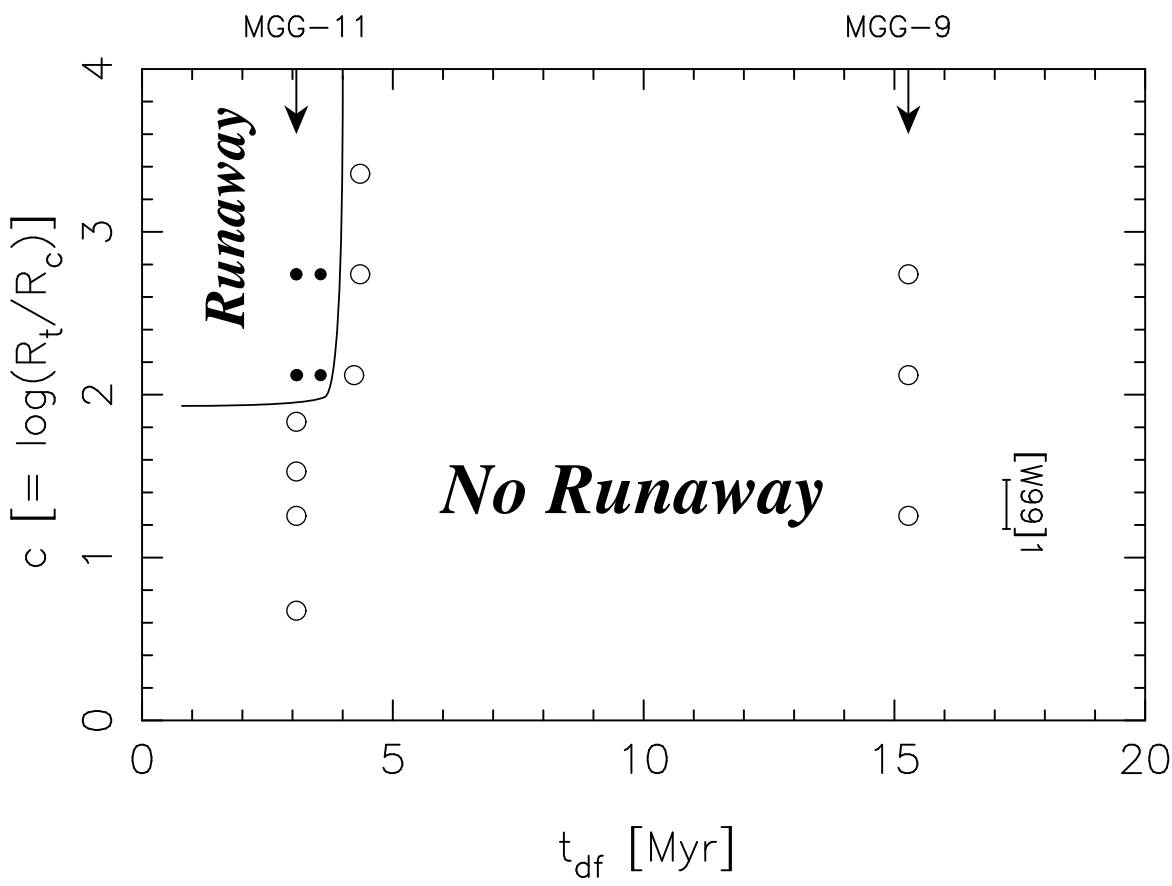
結果



$W_0 \geq 8$ なら暴走的合体 (MGG-11では)

MGG-9 (緩和時間長い) では暴走的合体はおきない

結果のまとめ



緩和時間が短く、かつ初期に小さいコアを持つ必要がある

暴走的合体

基本的には、ダイナミカルフリクションの時間スケールが大質量星の寿命より短いなら暴走的合体はほぼ必然的に起きる。

暴走的合体を起こした星は(多分)そこそこ大きな BH、例えば $100\text{--}1000 M_{\odot}$ になるであろう。

定量的な結果は超大質量主系列星のモデル、半径、質量放出やブラックホールになる質量の割合による。

IMBH 形成についてのまとめ

- 暴走的な合体による IMBH の形成は、理論/数値実験の結果を見る限りありそう。
- 暴走的な合体が起きる条件は星団の緩和時間が短く高密度なコアを持つこと

暴走的合体は、少なくとも、M82 の星団の中にある IMBH 候補を説明する極めてもっともらしいモデルではある。(他になんかあるわけでもない)

他の IMBH 候補

- NGC 2276 (Davis and Mushotzky, ApJ 604, 653, 2004)
 - $L \sim 1.1 \times 10^{41}$ erg/s
 - SED は MCD とはあわない (ULX に一般的な傾向)
- NGC 4559 (Cropper et al MN 349, 39, 2004)
 - $L > 2.1 \times 10^{40}$ (X7), $L > 1.3 \times 10^{40}$ (X10)
 - SED は MCD でもいい?
- ULX のほとんどは若い星団の中/近くにある (Zezas et al ApJ 577, 710, 2002, Kaaret et al MN 348, L28, 2004)

IMBH と SMBH の関係

1. 無関係？

2. 同じようにできた？

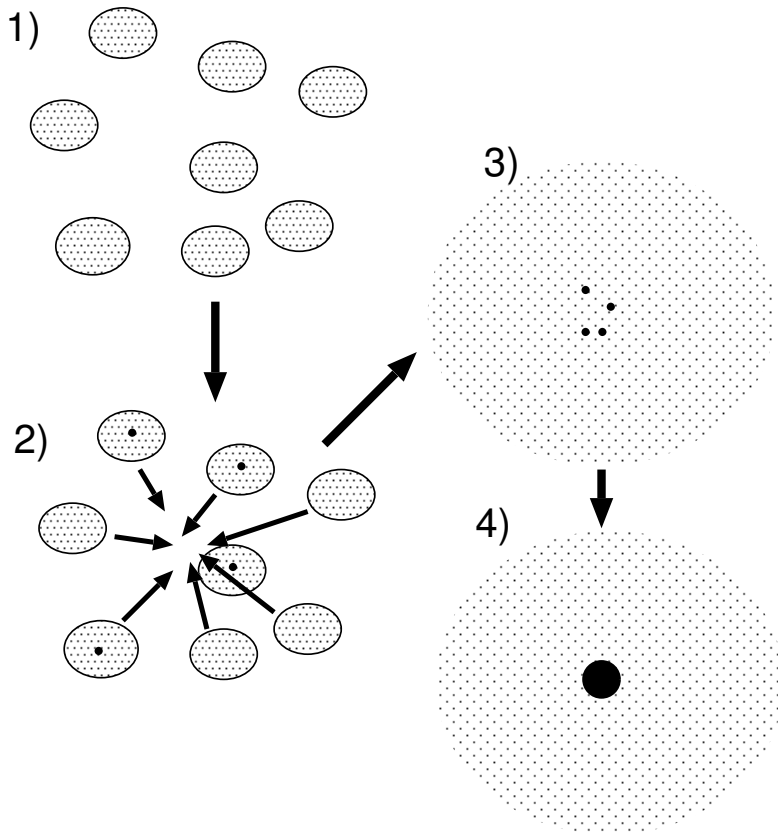
- SMBH の成長時間長すぎる

3. SMBH を IMBH から作る？

- タイムスケールの問題を解決できる (かも)

Merger シナリオ

Ebisuzaki et al. 2001 ApJ 562, 19L



1. スターバーストで大量に星団を作る
2. いくつかの星団では IMBH ができる。多くの星団はダイナミカルフリクションで中心に沈む。
3. 星団は潮汐破壊。IMBH は中心に残る。
4. 複数の IMBH は星や他の IMBH との相互作用で連星になり、重力波で合体するところまでハードになる。

理論的問題

- IMBH はできる？ — 「問題なし」
- 球状星団に IMBH がないのは何故？ (本当にない?) —
Baumgardt et al., Portegies Zwart et al.
- 親星団は IMBH を銀河中心に持ち込めるか？
- IMBH 同士は合体できるか？

球状星団に IMBH がないのは何故？

教科書的回答:

1. 球状星団の緩和時間は長い $\sim 10^9$ yrs.
2. コアも多分初期に小さくない

本当に？ M15 と G1 は？

M15 はないという話は昨日した。

球状星団に IMBH はあるのか？ (続き)

探していた場所は間違っていないか？

そもそも BH のある球状星団はどんなふうに見えるのか？

理論 (Bahcall and Wolf 1976): $\rho \propto r^{-7/4}$.

表面輝度のカスプの傾きは -0.75 のはず。

注意:

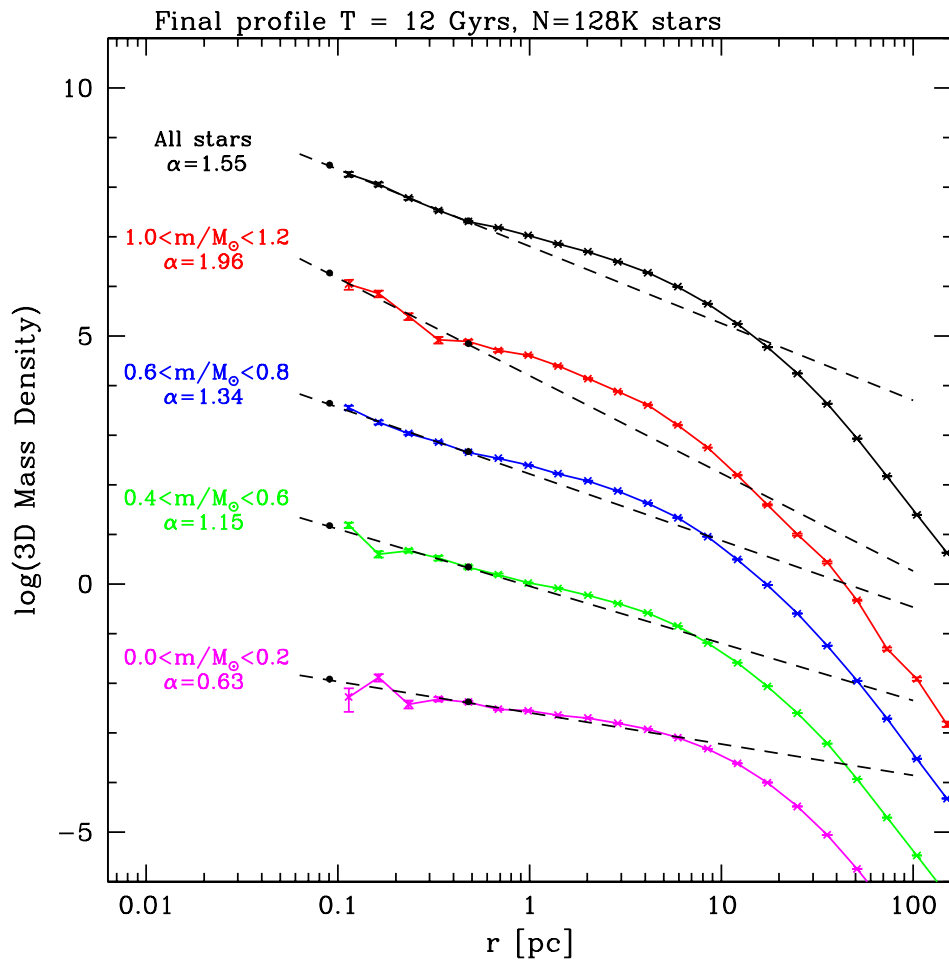
- -0.75 はあくまでも漸近的な傾き
- 全ての星が同じ質量と仮定

もっともらしい IMF と恒星進化モデルを入れて、IMBH がある球状星団を進化させてみた。

($W_0 = 10$ King model)

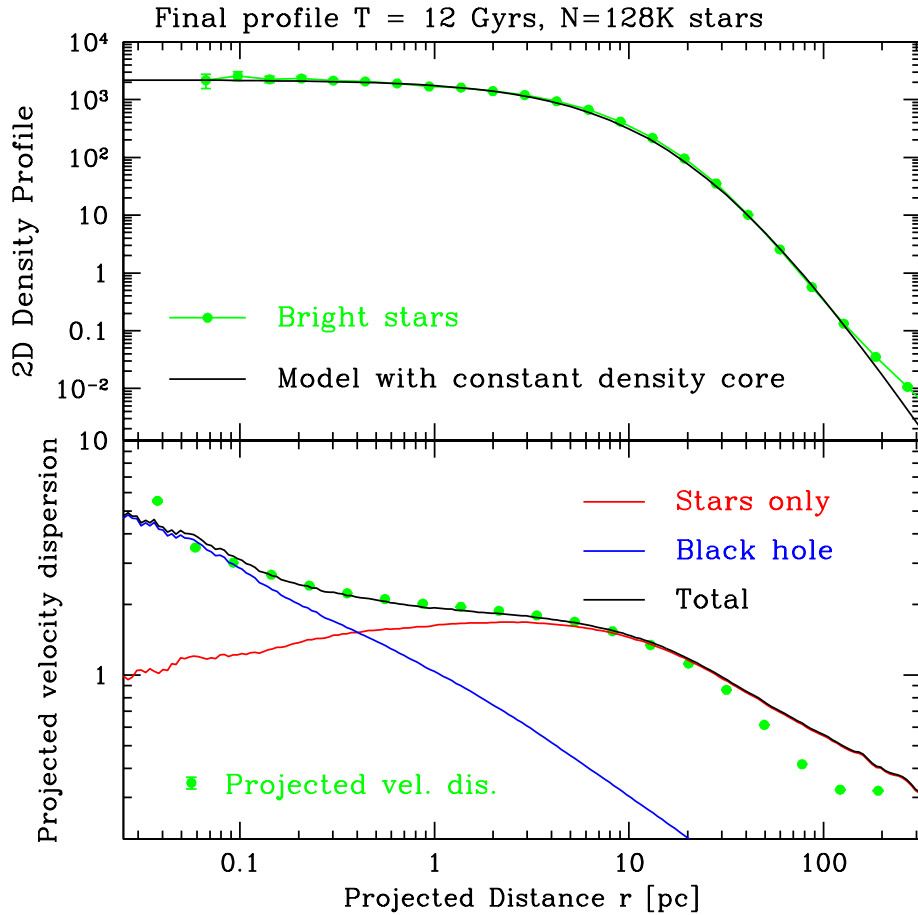
Baumgardt et al 2004 a, b, ApJ accepted.

3D 密度分布



- 軽い星はスロープ
浅い
- 最も重い星:
 ~ -2 ($-7/4$ じゃない!)

投影

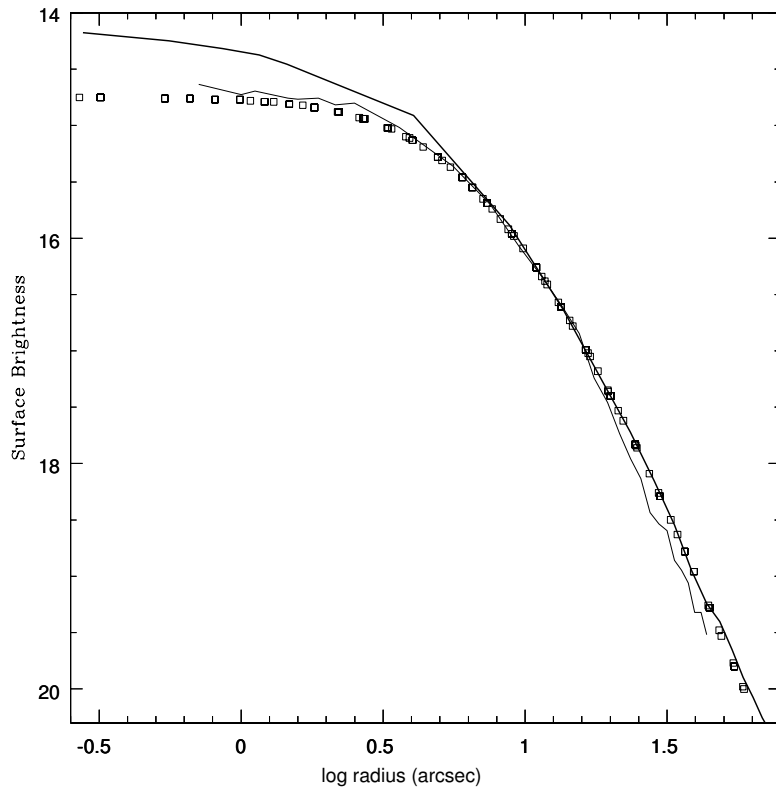


- どう見てもフラットなコアがある
- 速度分散は「コア」の中心近くで微妙に増加

IMBH があるのは一見普通にコアがある球状星団のほうと思われる

さて、観測は？

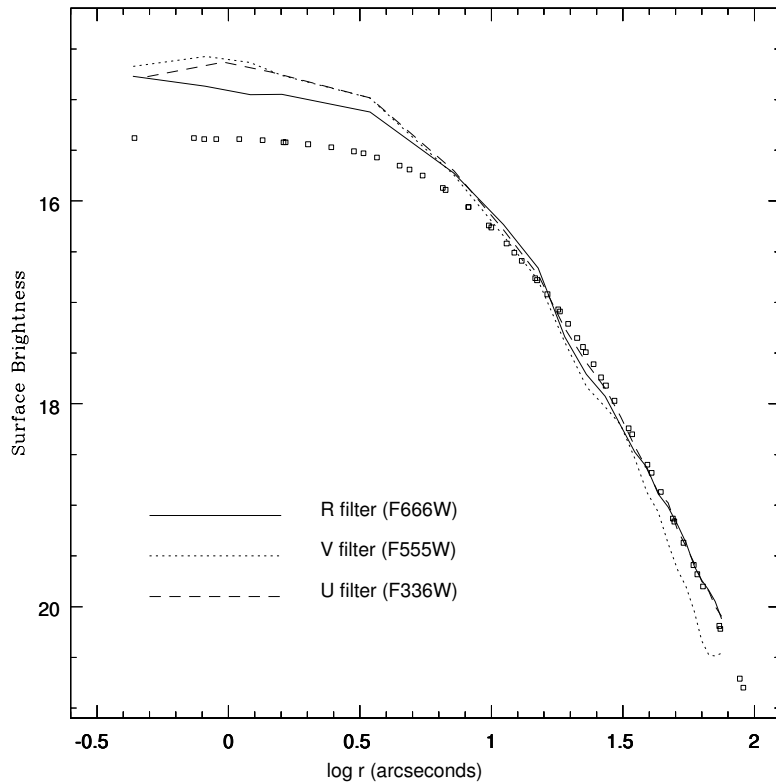
Noyola and Gebhardt (AJ, 2006)



HST WFPC2 での integrated light で書いた表面輝度分布

まだ controversial な結果
(主な理由: M15 のブラックホールの発見をやった人である)

さて、観測は？(2)



主張は、 HST WFPC2
でちゃんと見ると地上観測より
コアが小さく、しかも完全に
フラットではないというもの。
の。

本当に本当ならブラックホール
があるのかもしれない。

銀河中心の恒星系力学

1. 観測でわかっている (らしい) こと

- Central Cluster
- Stellar Disk(s)
- Star Cluster(s)

2. 理論モデルについて少し

- 星団の軌道進化と力学進化
- 中間質量ブラックホールの軌道進化

3. まとめ

観測でわかっている(らしい)こと

- Central Cluster
- Stellar Disk(s)
- Star Cluster(s)

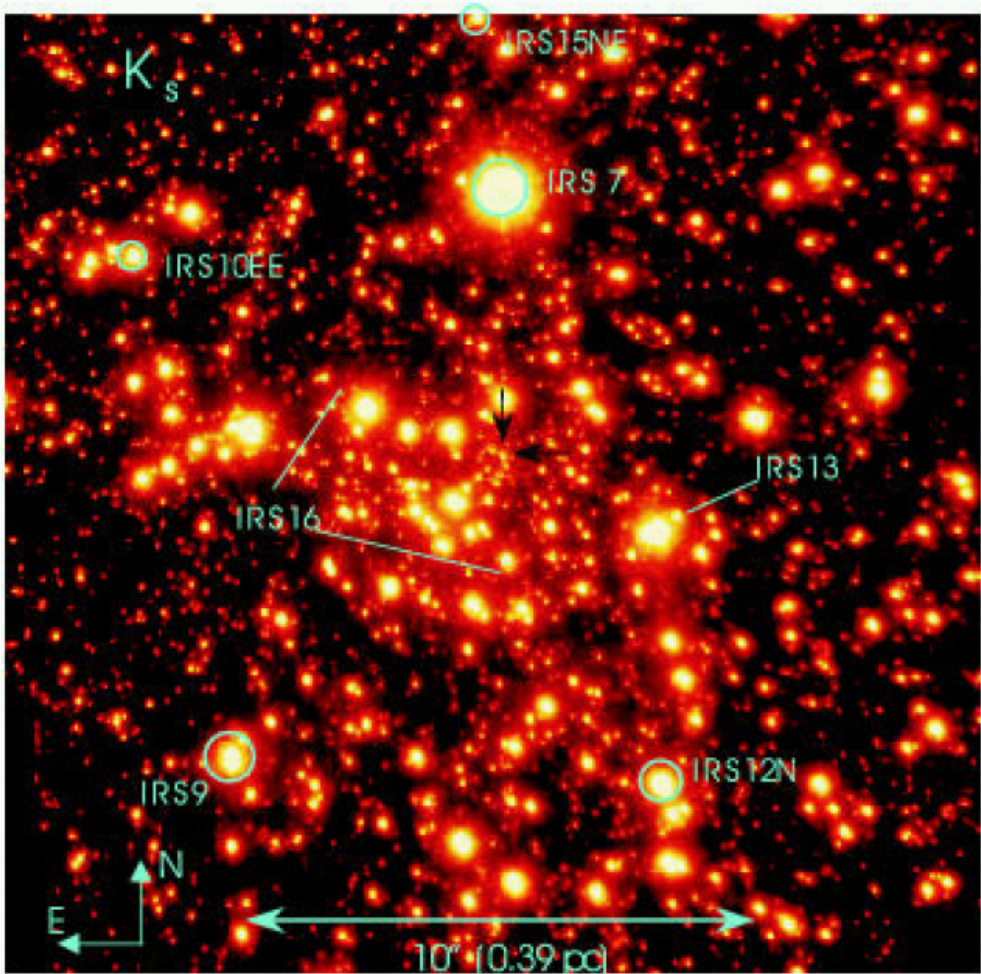
Central Cluster

Genzel et al 2003

K-band

shift-and-add image

中心付近の黒い矢印
の先が SgrA*



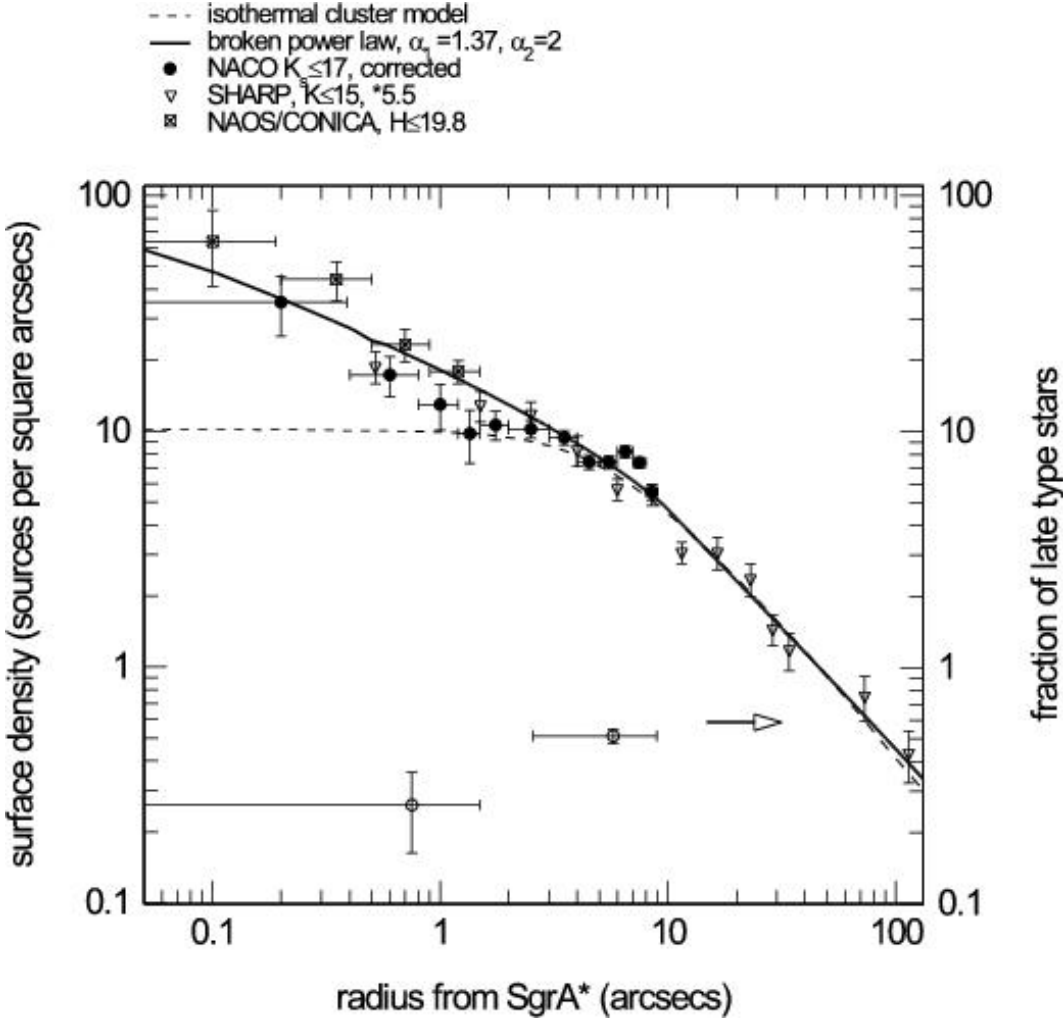
Surface density

Genzel et al 2003

10'' 以内の恒星の質量 $\sim 10^6 M_\odot$ (あんまり信用はできない)

若い星が結構多い。

0.5'' 以内でも若い星がある。(S1, S2, S0-16 ...)



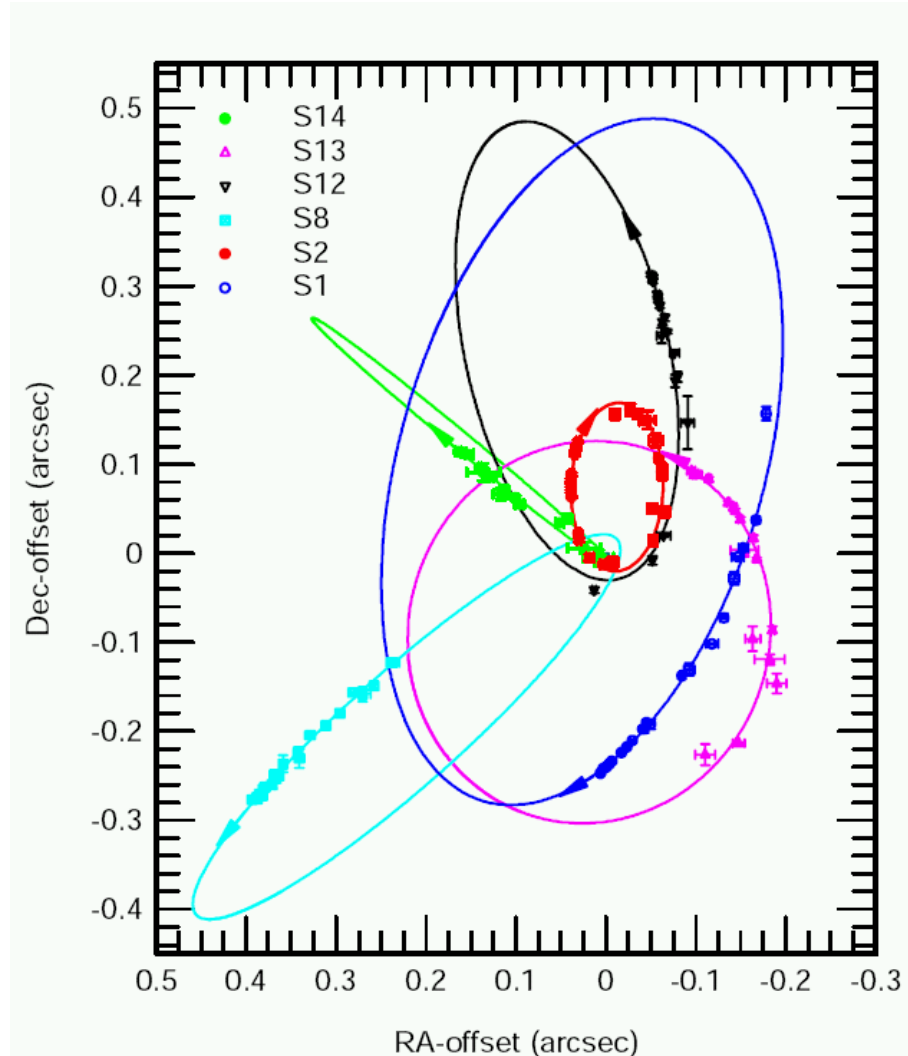
いくつかの中心付近の星の軌道

Eisenhauer et al
2005

星の分布は「等方的」
少なくとも円盤的とは
いいがたい

これらの星は結構若い
($10M_{\odot}$ 以上)

もっと暗い星は普通の
赤色巨星

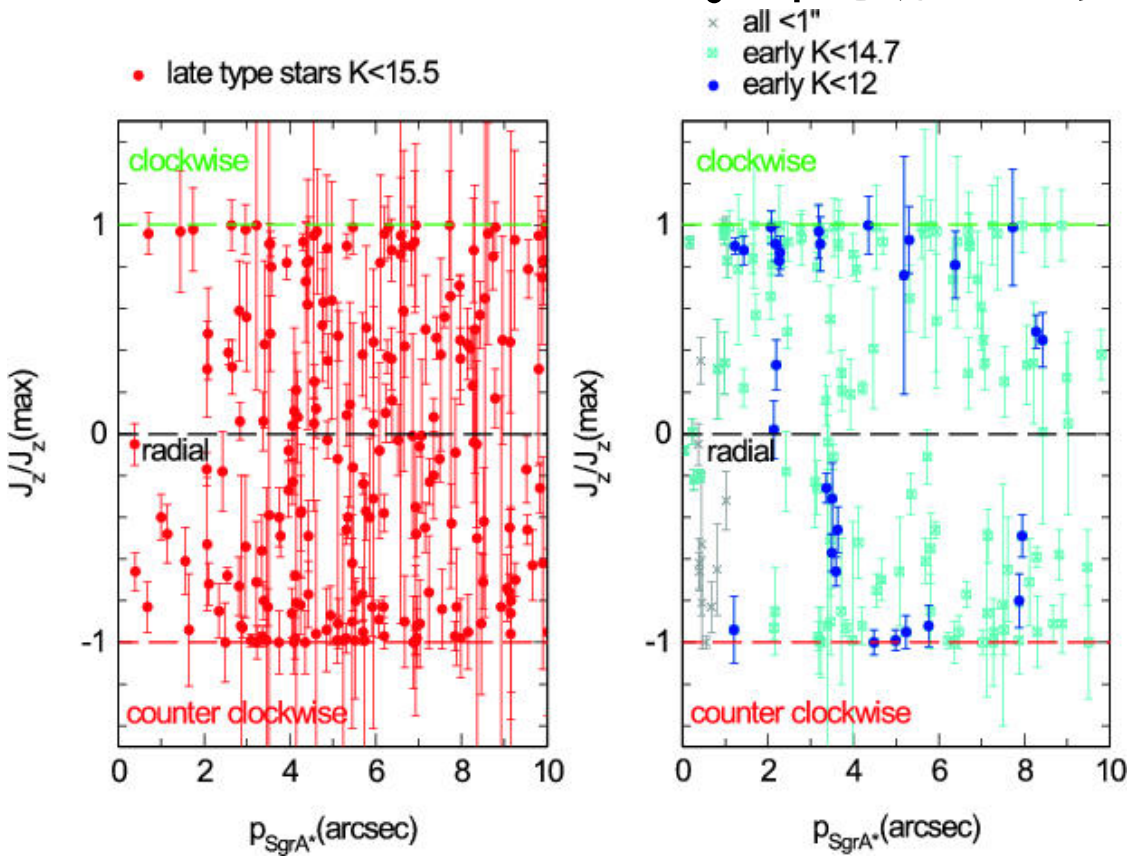


理論屋から見た課題

- 何故若い星がそこにあるのか
 - その場で作る？
 - 少し近くから緩和で運ぶ
 - 遠くからなんとかして運ぶ
- まだ見えない星はどんなふうか
- 中心ブラックホールの形成・成長との関係は？

Stellar Disk(s)

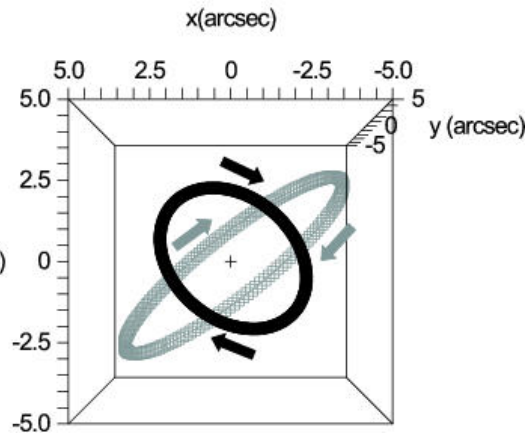
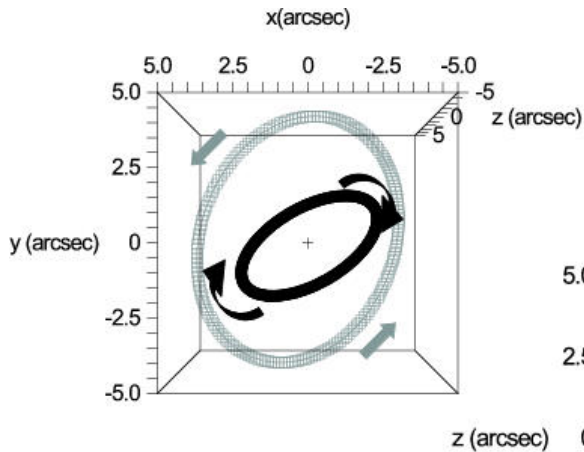
また Genzel et al 2003。中心からの距離と角運動量



特に明るい星は 等方的ではない。時計回りと半時計回りの2

つのリング。

空間構造



Paumard et al
2006 (図は Genzel
et al 2003 から)
傾いている。

どちらも星の年齢
 $6 \pm 2 \text{ Myrs}$

そんなに薄いわけ
ではない ($e \sim 0.3$)

なぜそんなものがそこにあるのか良くわからない。

理論屋から見た課題

- どうやってディスクを作るか
 - その場で作る (Nayakshin et al 2005)
 - 遠くから星団で運ぶ (Hansen & Milosavljević 2003)
- 中心部の星との関係
- Minispiral との関係 (?)

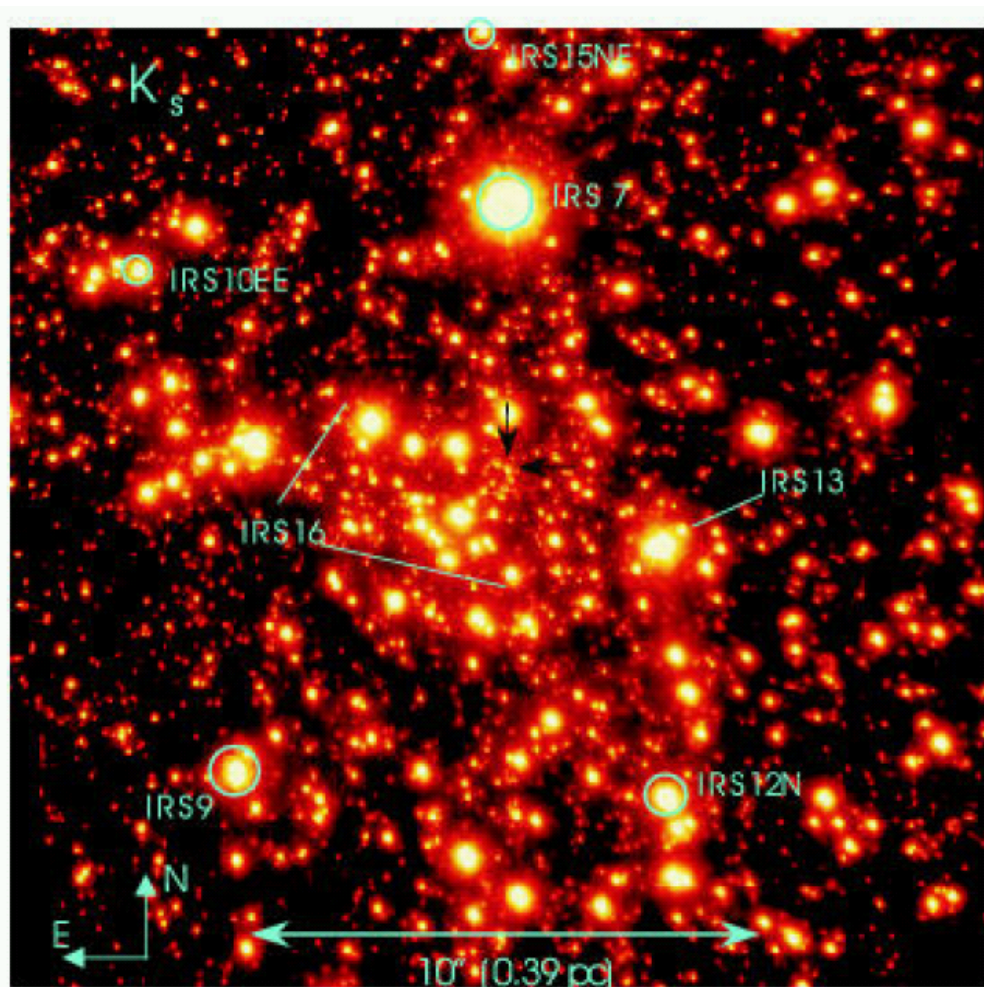
Star Cluster(s)

IRS13E, 16SW は
それぞれ星団らしい
(?)

IRS13E: 反時計回り
ディスク

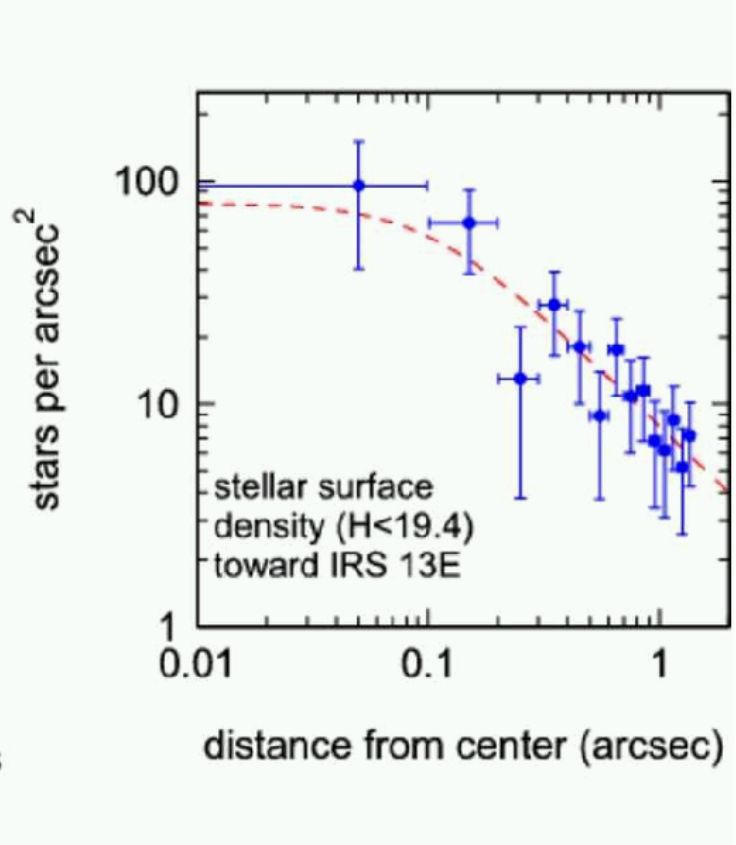
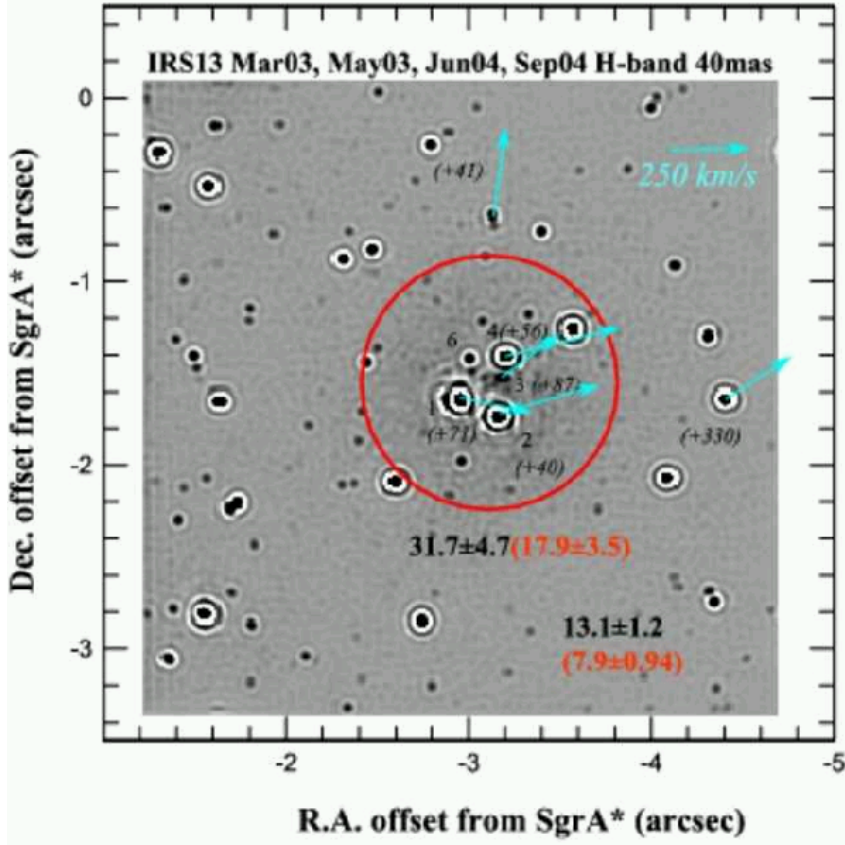
IRS16SW: 時計回
りディスク

bound だとすると結
構質量が必要
→ IMBH???



IRS13E は本当に星団か？

Paumard et al 2006 H-band 観測



見た目星団っぽい。

星団だとすると

コア半径 0.17''

潮汐半径 1'' 以上？

銀河中心までの距離 4'' くらい。

潮汐半径が 1'' とすると $4 \times 10^4 M_{\odot}$ くらい必要。

これは Sgr A* の速度と矛盾するかも。 Paumard et al ではこの問題は無視されている。

観測のまとめ

- 妙に若い星がある
- 0.3pc くらいより内側ではカスプのスロープ浅い
- 0.1pc くらいより外側では若い星はディスク状。ディスクは2つある。
- それぞれのディスクの中に星団のようなものもある。
- ディスクの星は結構年齢がそろっている

銀河中心の理論モデル

いろんなことを統一的に説明できるような理論モデルはあるか？

とはいえ、一度に全部、は無理なので、まずディスクを考える

提案されているモデル

- ガスディスクから作る
- 星団を落とす

ガスディスクから作る

Milosavljević & Loeb 2004

Nayakshin and Sunyaev 2005

個人的にはあんまり本当とは思えない

- ほぼ同じ時期、ほぼ同じ場所に逆回転するガスディスクが2つというのはあまりに無理
- 星の「ディスク」がガス起源にしては速度分散が大きすぎる
- 星が重力相互作用でディスクを加熱する時間スケールは結構短い。速度で 6km/s までに 10^4 年くらい。自己重力的になるほどディスクが薄くならない

星団を落とす

Hansen & Milosavljević 2003

Portegies Zwart et al. 2005

これも色々無理が、、、

- よほど近くに星団があるか、ありえないほど重いかでないと力学的摩擦では落ちてこない

とはいえ利点もある。

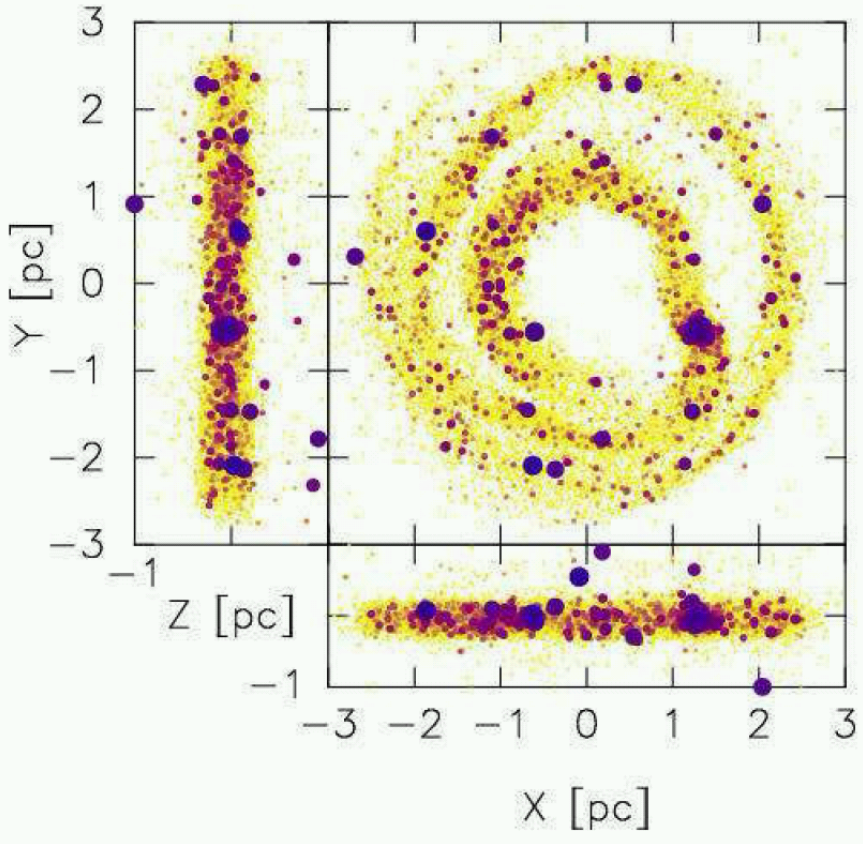
- 若い星団はある。 Arches, Quintuplet
- IMBH があるとする、銀河中心近くまで若い星をもつてくのは可能

- 複数ディスクも問題ない。星団とディスクも同時に説明

星団を落としてできるもの

もちろんかなり厚いトラス

観測とは矛盾しない



Portegies Zwart et al 2005 これはちょっと外側すぎる例。

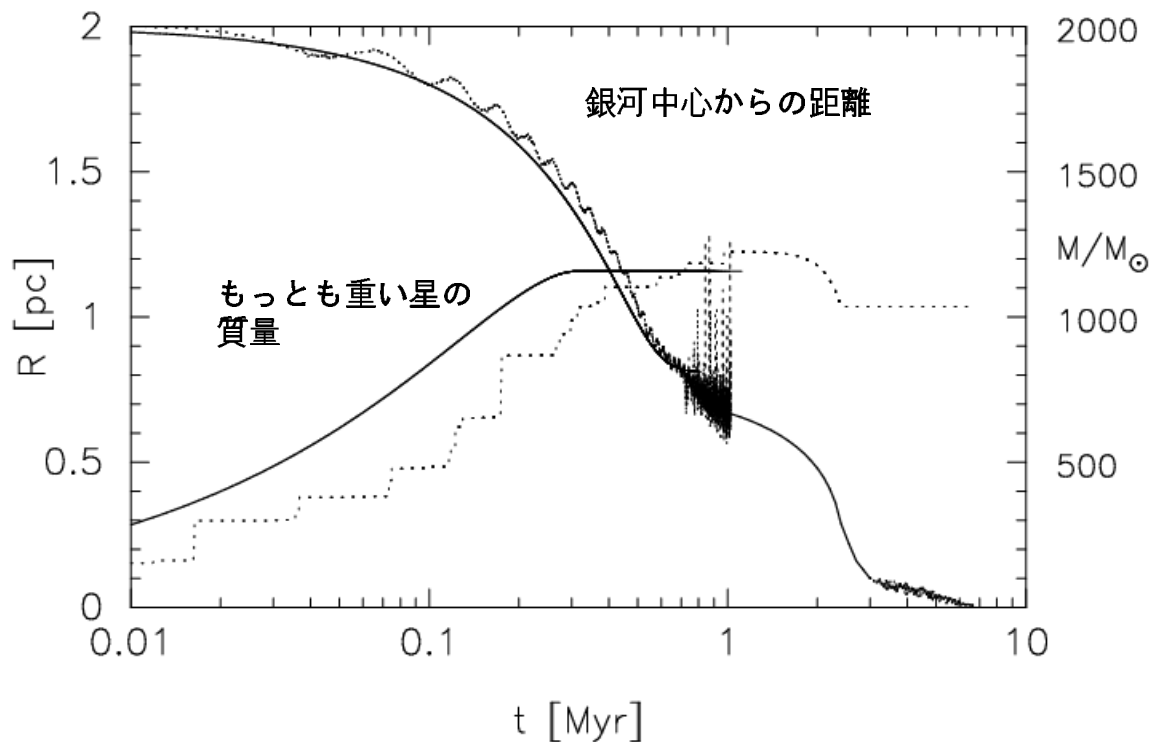
N-body simulation の例

Portegies Zwart et al 2005

- 64K stars, Salpeter IMF (lower cutoff: $0.2M_{\odot}$)
- 2pc from GC, circular orbit
- Roche-lobe filling King model ($W_c = 9$)

これは、IRS13E みたいなものをつくらう、という話。

結果



破線: シミュレーション、実線: 解析的モデル

つまり

- 2pc くらいに $10^4 M_{\odot}$ くらいの星団ができれば数 Myrs で落とせる
- 5pc とか 10pc だとはるかに重い必要がある。

つまり: IRS13E みたいなものを作れなくはないが、結構不自然な初期条件が必要？

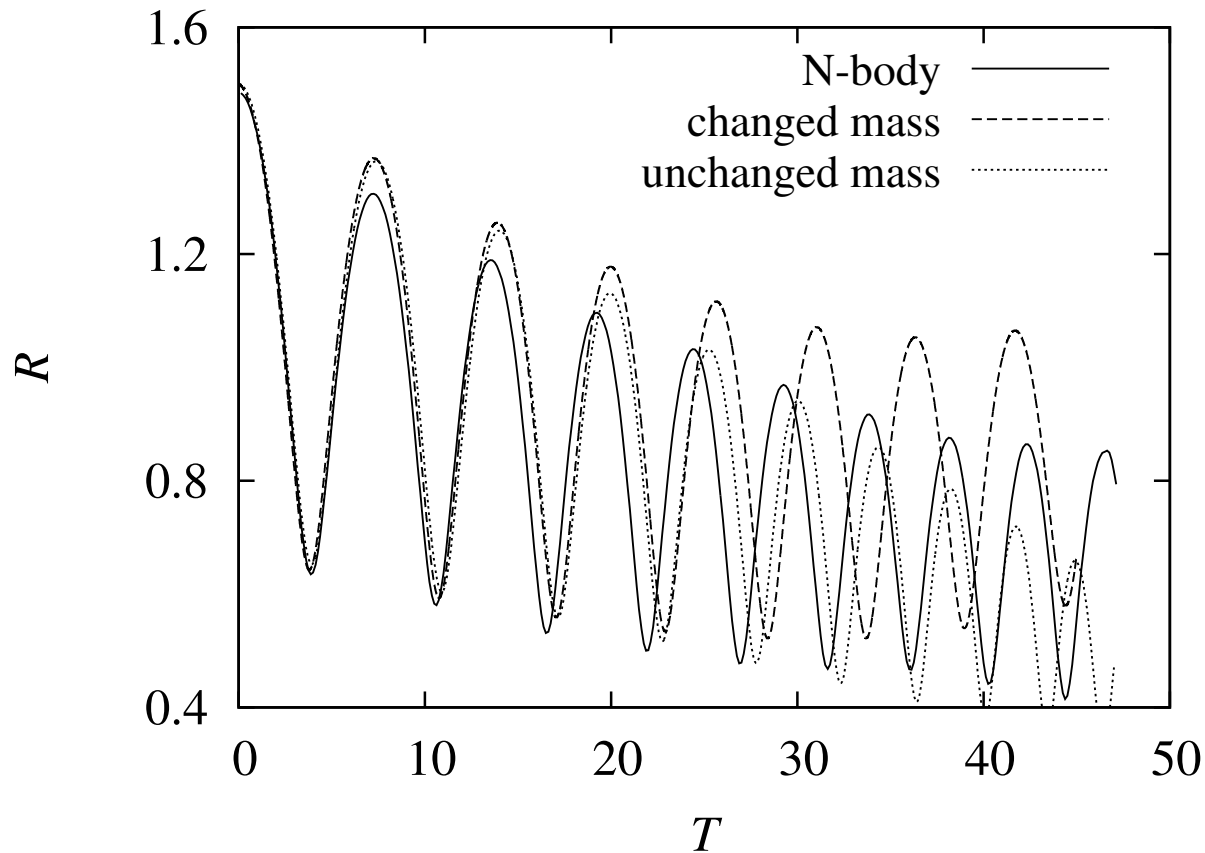
N体計算は信用できるか？

実は色々疑問。

- 星団の軌道進化は力学的摩擦を手でいれている。
- 初期の軌道が円軌道というのは本当かどうかわからない。

星団の軌道進化

藤井他 2006: 衛星銀河の N 体計算では、実は力学的摩擦を手でいれたのより速く落ちる。



速く落ちる理由

- 衛星銀河から逃げた星に角運動量を渡す
- 逃げた星もまだ衛星銀河本体近くにいると、その重力で力学的摩擦を大きくする

どちらも微妙な効果だが結構大きい。

円軌道？

若い星団がどうやってできたかは不明。

従って、どういう軌道を考えるべきかもあんまり根拠はない。

できた時にあまり軌道角運動量もってなければ速く落ちる。

星団のできかたと、ガスの運動との関係の理解が必要？

ちゃんと星団として計算してみる

藤井他、学会でした話

- 星団はちゃんと星の質量分布と進化とかちゃんといれて計算したい
- 親銀河は十分な粒子数を使いたい

星団は精度が高い直接計算で独立時間刻み

親銀河はツリーコード

全体としてつじつまがあった計算コードを作って計算したい。

ヨーロッパで数グループが似たようなことに挑戦中。実は上手くいったところはない結構難しいらしい話。

星団の軌道進化への拡張

親銀河の粒子: 普通に時間刻み一定のツリーコード。

星団の粒子:

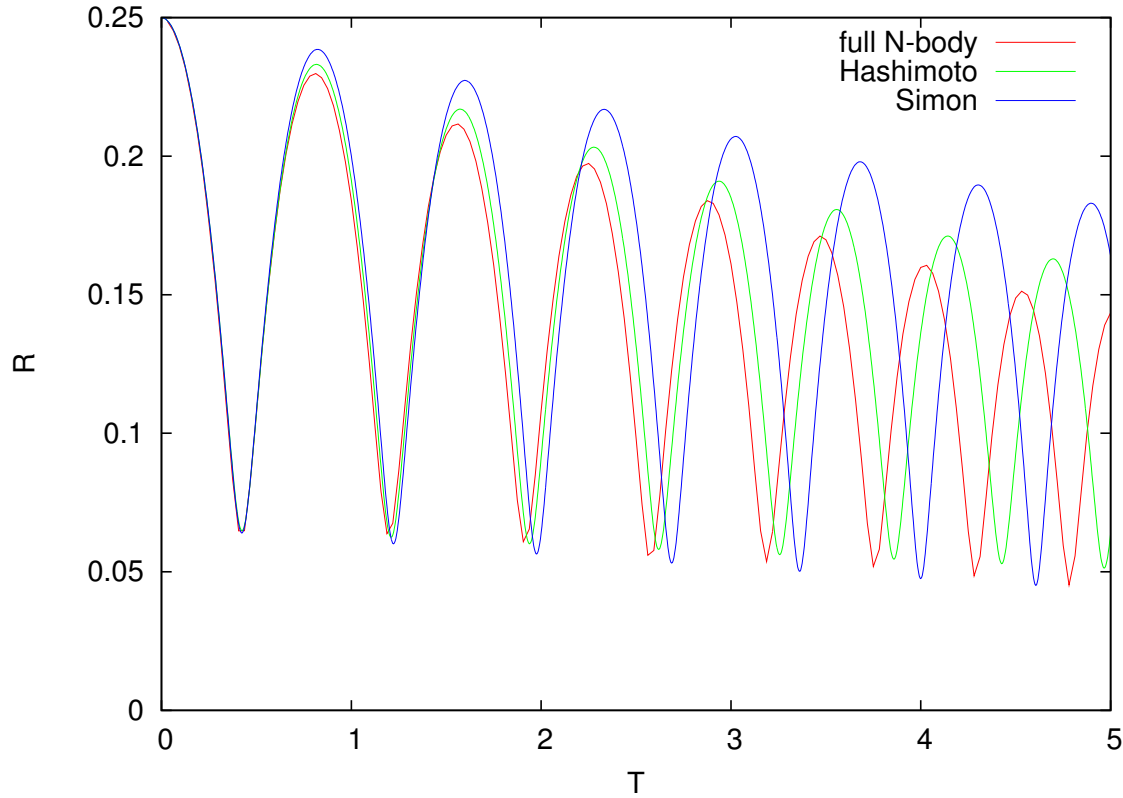
親銀河の粒子からの力は上のツリーコードでそのまま計算。

時間刻み一定、軌道積分公式はリーブフロッグ。つまり、上の時間間隔で速度を普通に更新。

星団内部は独立時間刻み。但し、最大時間刻みが上のツリーコードの時間刻みにそろえるようにする。

やってみたら結構上手くいった。

計算結果の例



$R:0.25$ が 5pc 程度。線が沢山あるのは、今回の計算と、力学的摩擦を手でいれた計算2つ。

微妙な違いかもしれないけどフル N 体のほうが速く落ちる。

IMBH の軌道進化

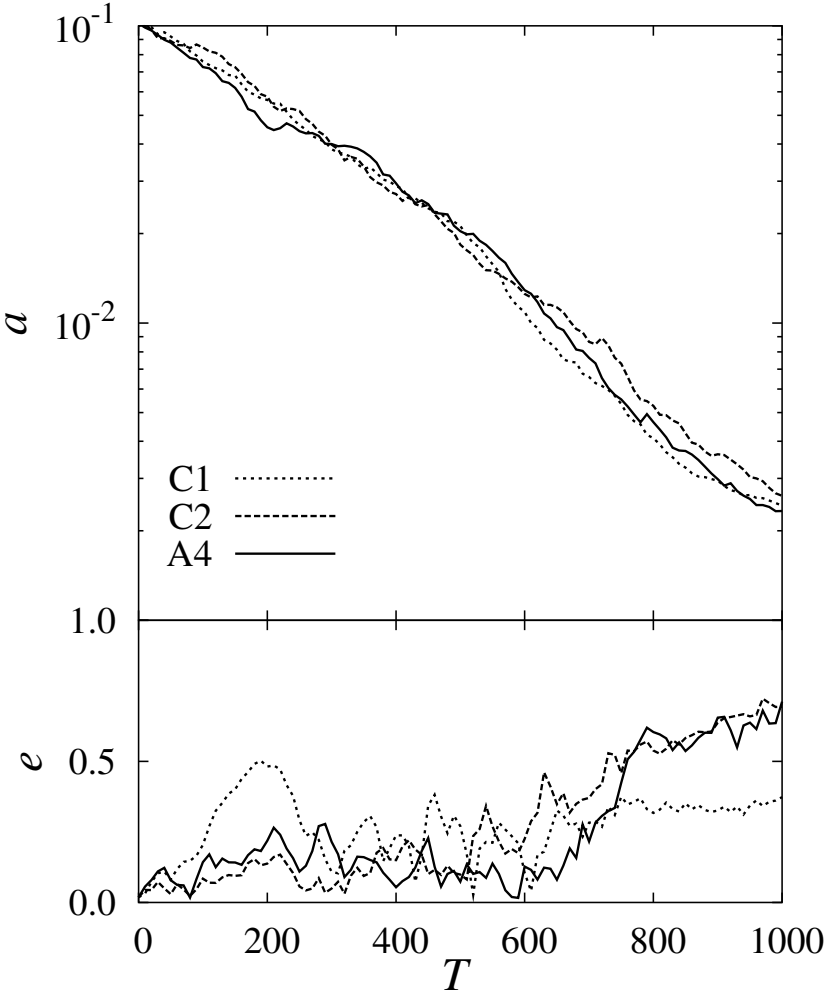
- SMBH と IMBH は合体するか？
- IRS13E (が IMBH だとして) の運命
- SMBH 同士は2体では合体しないけど、、、

Matsubayashi et al 2005 (ほぼアクセプト)

モデル計算

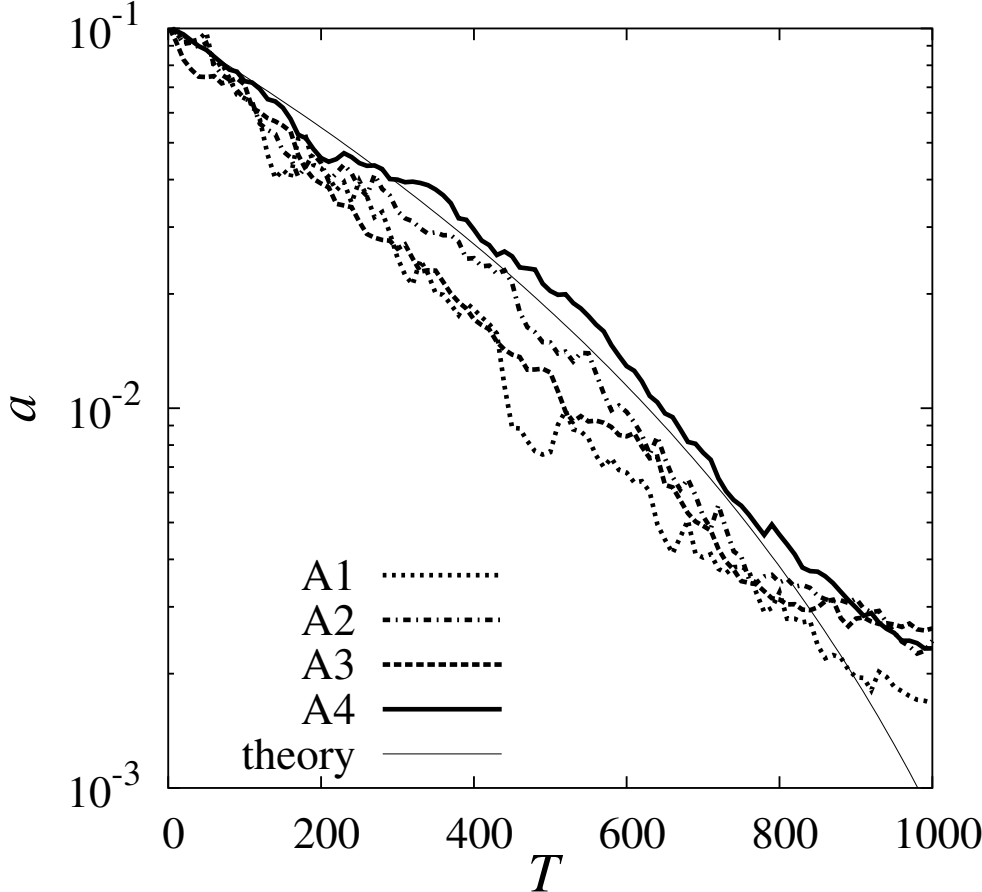
- ほぼ銀河中心みたいな Bahcall-Wolf カスプを作る
- SMBH $3 \times 10^6 M_{\odot}$
- IMBH $3 \times 10^3 M_{\odot}$
- 単位系: 長さ大体 1pc, 時間 4600 年
- 星の質量は最低なので $3M_{\odot}$

軌道進化



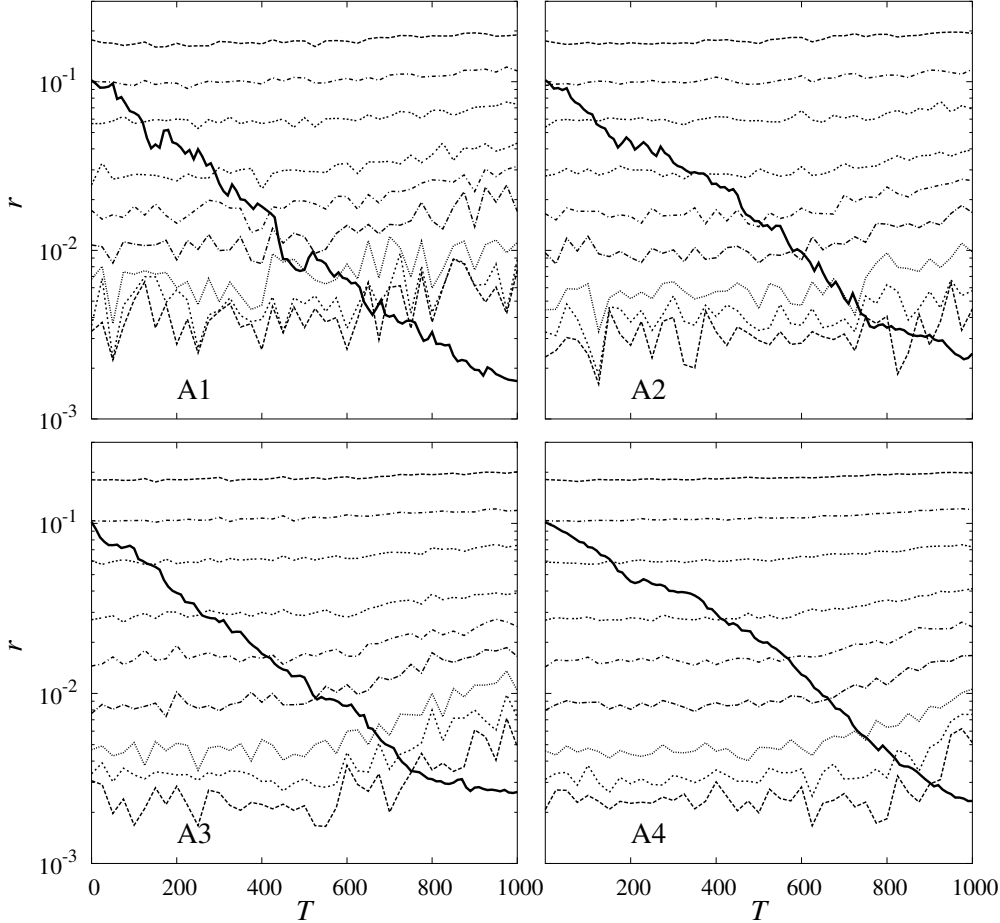
落ちるけど遅くなる

軌道進化。解析解との比較



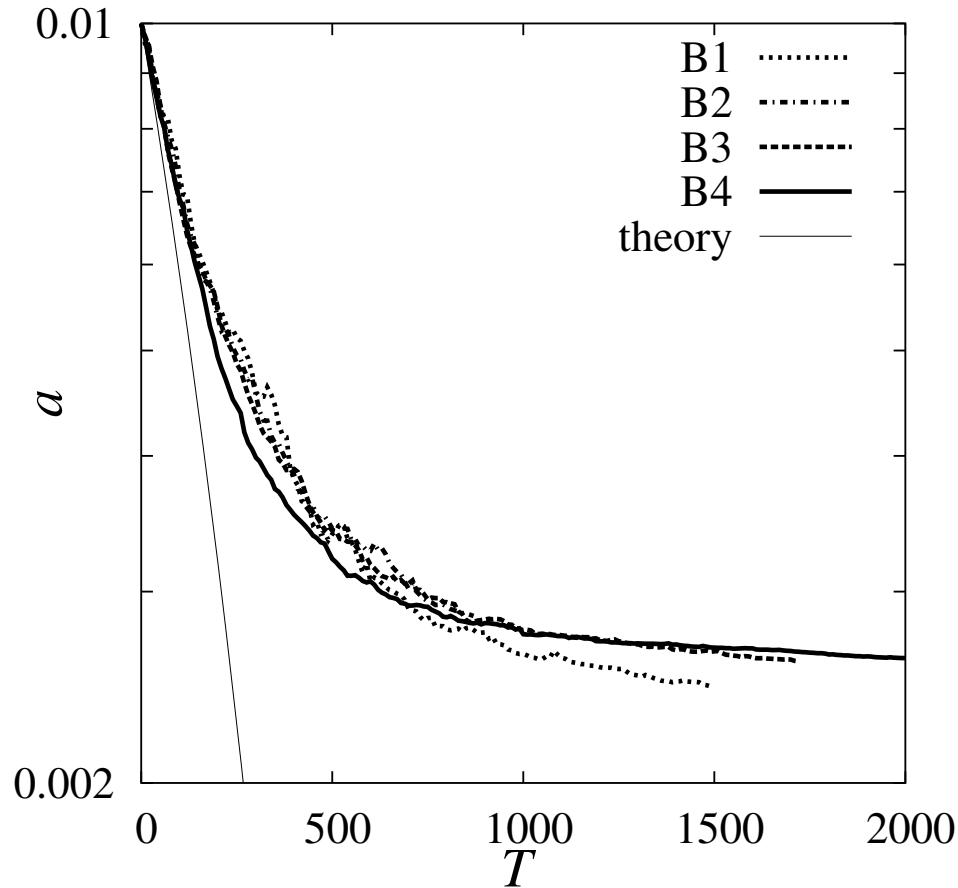
後のほうで遅くなる

軌道進化。質量分布の変換



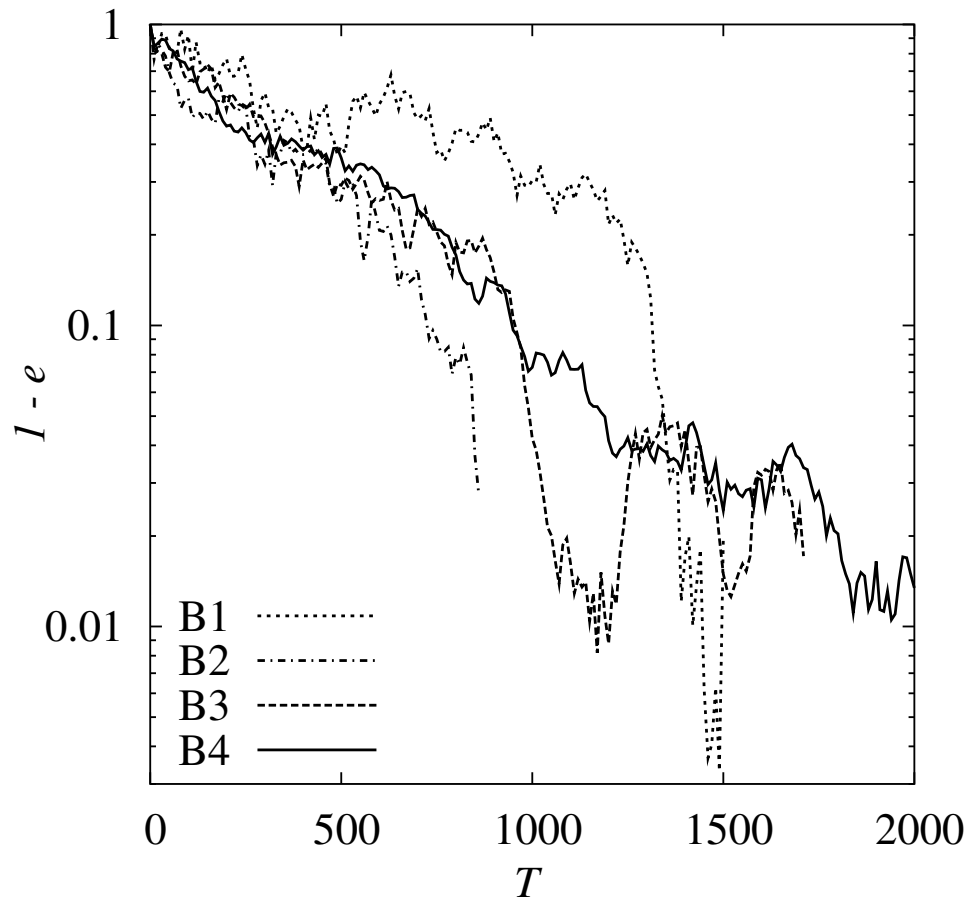
内側のほうは広がる
要するに、周りに星
が無くなる
Loss-cone depletion
進化しなくなる

あとのほうだけ詳しく計算



始めから 0.01pc に
IMBH おく
field star の質量小
さくする
やっぱり、後のほうで
遅い

離心率

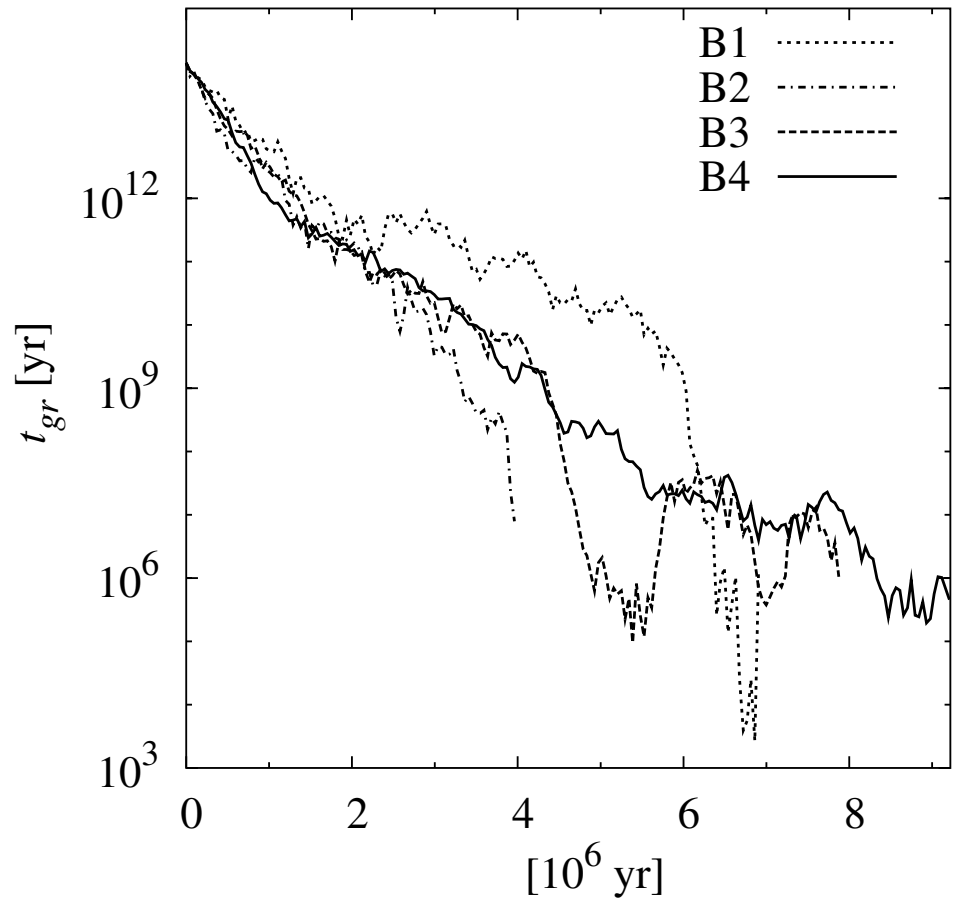


軌道半径が進化しなくなると離心率があがる

これはSMBH 連星では起きない

Fukushige et al 1992 で考えたこと？

重力波タイムスケール



結構短くなる

まとめ

- 最近の観測の進歩により、銀河中心の恒星系がどうやってできたかは良くわからなくなった。
- 特に若い星の起源、ディスクになっている理由についてはあまりよい理論モデルがない。
- ある程度遠くでできた星団が力学的摩擦で落ちてきた、というモデルは色々良い性質を持つが、軌道進化のタイムスケール等問題もある。
- でも、若い星がその場でガス円盤からできた、というのよりは問題が少なそうな気がする。

大質量ブラックホール連星の進化

1. 何が問題か？
2. これまでの自分及び人の仕事
3. 新しい計算
4. 結果
5. 考察

何が問題か

- 楕円銀河は大抵大質量ブラックホールを中心に持つらしい(Nukers を信じるなら)
- 楕円銀河の中心部の構造(輝度分布)は、「ブラックホールがある銀河同士の合体」と矛盾しない(銀河が合体してからブラックホールが成長したと考えると密度カスプが観測より深い必要がある)

つまり、大質量ブラックホールをもつ銀河同士が合体したと考えられる。

IMBH から MBH を作るにも合体が必要。

ブラックホール2つは合体できるか？

わかっている (つもりの) こと

- BH はできた銀河の中心に沈む (力学的摩擦のため)
- で、2つが連星系になる

この辺は球状星団で重い星が中心に沈んで連星を作るのと変わらない

違い:

- ブラックホールは非常に重い = ブラックホールのランダム運動は小さい
- 周りの星の数が非常に多い = 緩和時間が長い

このため、角運動量の小さい、ブラックホールと相互作用できる星が使いつくされる可能性がある (loss cone depletion) そうなると進化が遅くなる (Begelman, Blandford and Rees 1980)

Loss cone depletion

もしもこれが起きると (周りの星との相互作用と重力波だけでは) 普通の大質量ブラックホール連星は宇宙年齢の間に合体しない。

合体するかどうか

- 合体を繰り返した時にブラックホールの質量が成長できるか
- LISA で観測できるか
- 合体しないとすれば何が起こるか

本当に depletion は起きるか？

理論的に自明というわけではない

Loss cone ができたらブラックホールの周りにはなにもない



ランダム速度が小さくても、真空でなくなる場所まで動いていかないか？

ちょっと別の話: 離心率が大きくなればなんとかならないか？

N 体計算で調べる

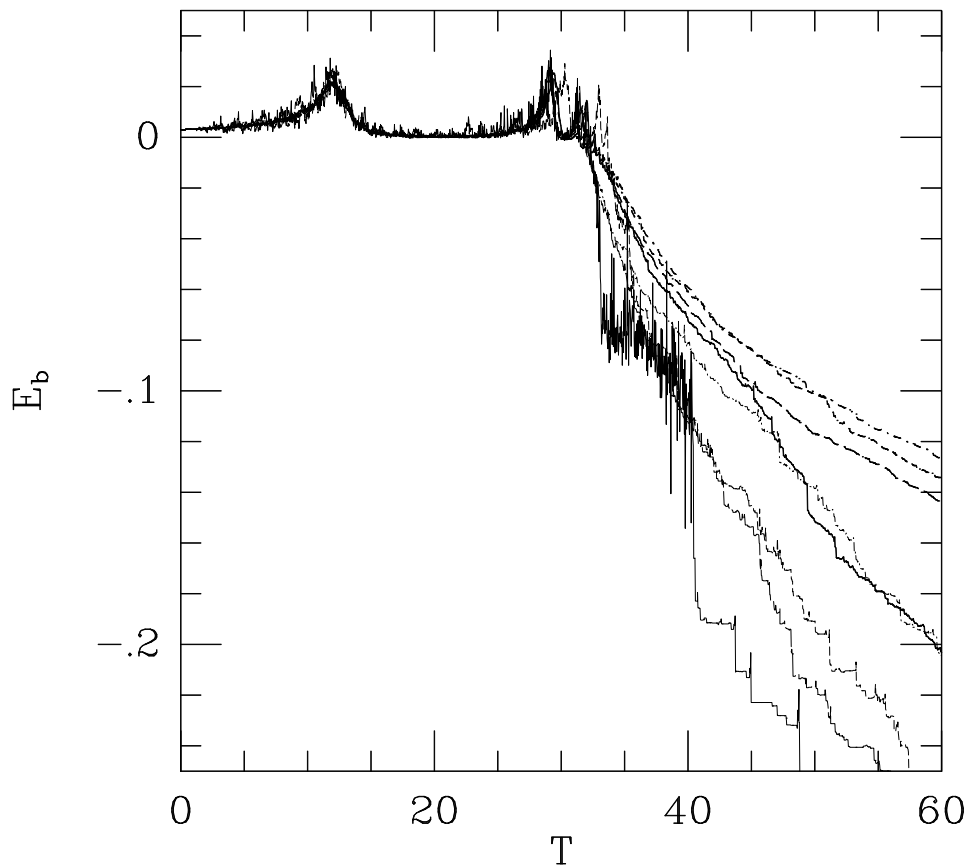
- Makino 1997
- Quinlan 1997
- Milosavljević & Merritt 2001
- Chatterjee, Hernquist & Loeb 2003

割合バラバラな結果、、、

Makino 1997

- King model ($W_o = 7$) 同士の合体
- 粒子数 2K — 256K
- $M_{BH} = M_{Gal}/32$
- GRAPE-4 での直接計算 (NBODY1)
- フィールド粒子同士は soft potential、BH が関係するものは $1/r$
- 重力波とかはなし

Binding energy



粒子数が大きいほうが
進化が遅いのは確か

問題はどれくらい遅く
なるか

エネルギーの変化率

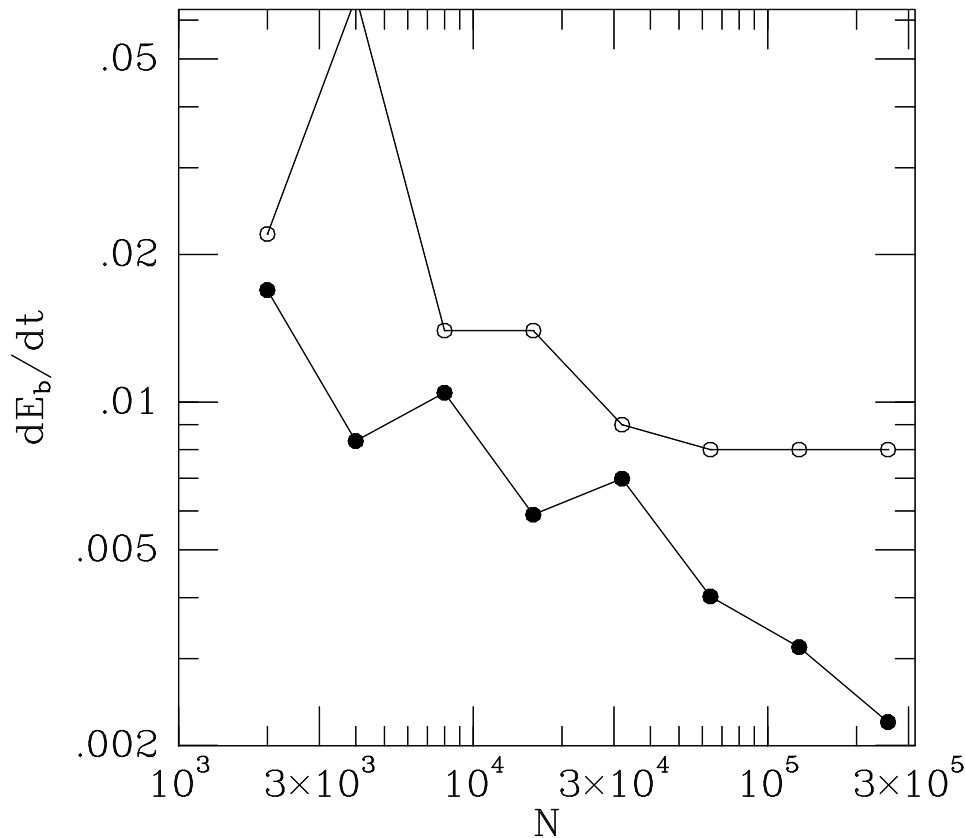
上: エネルギーが
1/160 から 1/80 まで

下: エネルギーが 1/10
から 1/5 まで

最初のうちは粒子数に
よらない

後になるとよる。傾き:
 $N^{-1/3}$ くらい

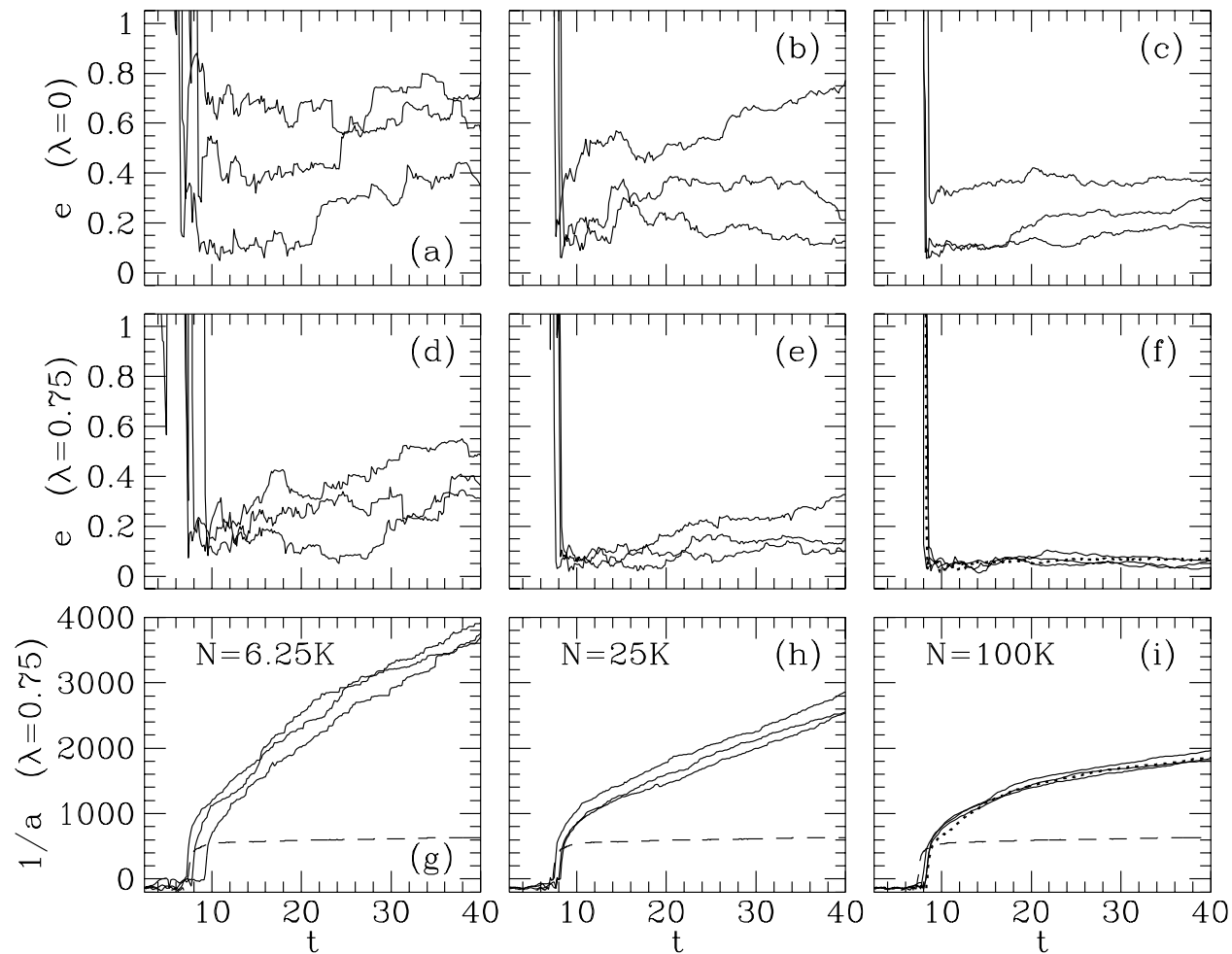
緩和時間の理屈に
合わない



Quinlan 1997

- Plummer model 1 つでブラックホール2個置く
- 粒子数 6.25K — 200K
- $M_{BH} = M_{Gal}/100$
- SCF + direct
- フィールド粒子同士は SCF、BH が関係するものは 直接計算

結果

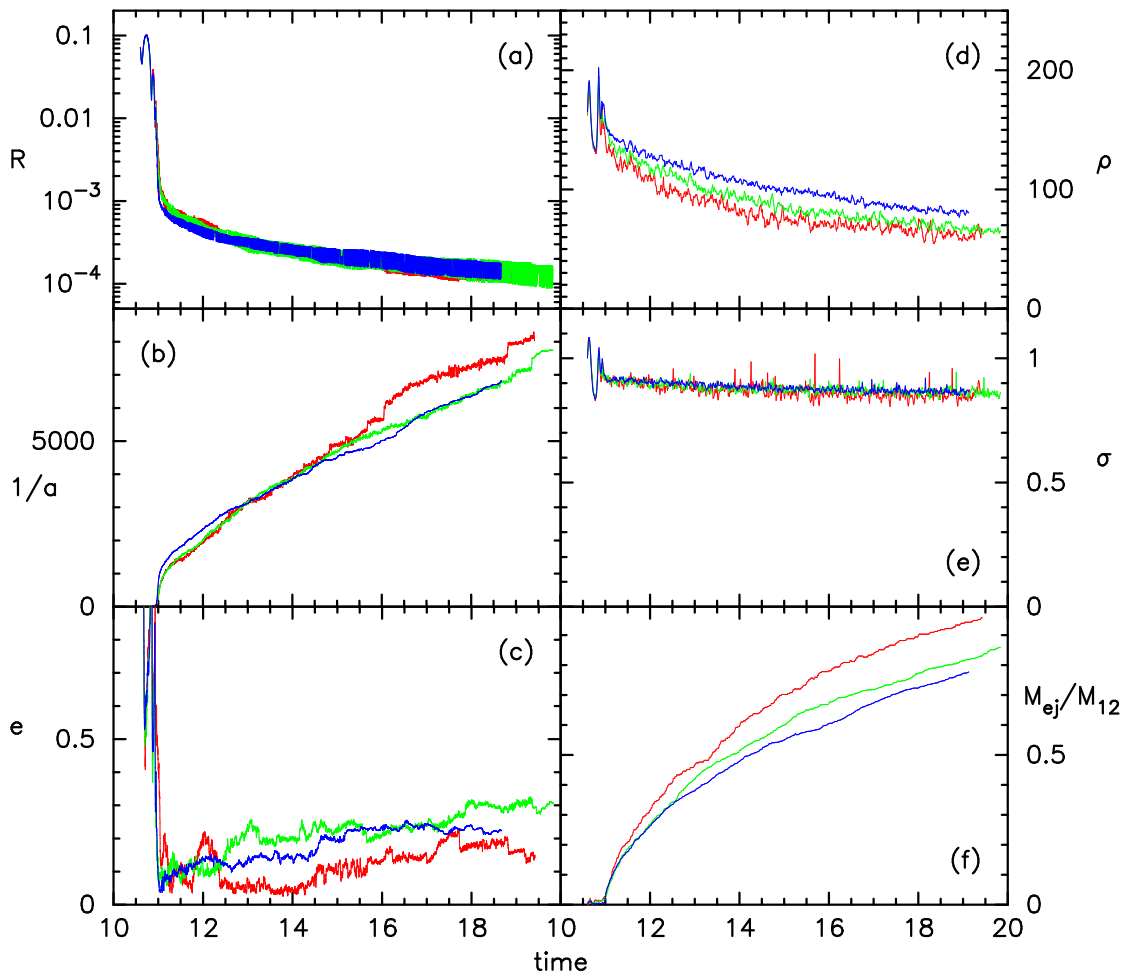


$N > 100K$ では粒子数によらない!?

Milosavljević & Merritt 2001

- 中心まで $\rho \propto r^{-2}$ の銀河モデル作って合体させる
- 粒子数 8K — 32K
- $M_{BH} = M_{Gal}/32$
- Tree+direct
- ブラックホール連星ができる直前まで Tree、出来たら直接計算 (Sun Starfire 上の並列コード)

結果



粒子数によらない

但し、論文では
「 N が十分大きくなれば N によるはず」と主張 (実験的な根拠はない)

Chatterjee, Hernquist & Loeb 2003

- Quinlan 1997 と同じ方法
- 粒子数 400K まで
- M_{BH} はいろいろ

図を見ても分からないが、

$N > 200K$ で N に依存しなくなった

と論文には何故か書いてある

従来の結果のまとめ

なんだかよく分からない

- 人によって答が違う
- loss cone depletion の理論に合う結果は一つもない

何が悪かったか

んなことがわかってれば苦労はない

- 粒子数が足りない？
- 計算コードが怪しい？
- 初期条件の違い？

新しい計算

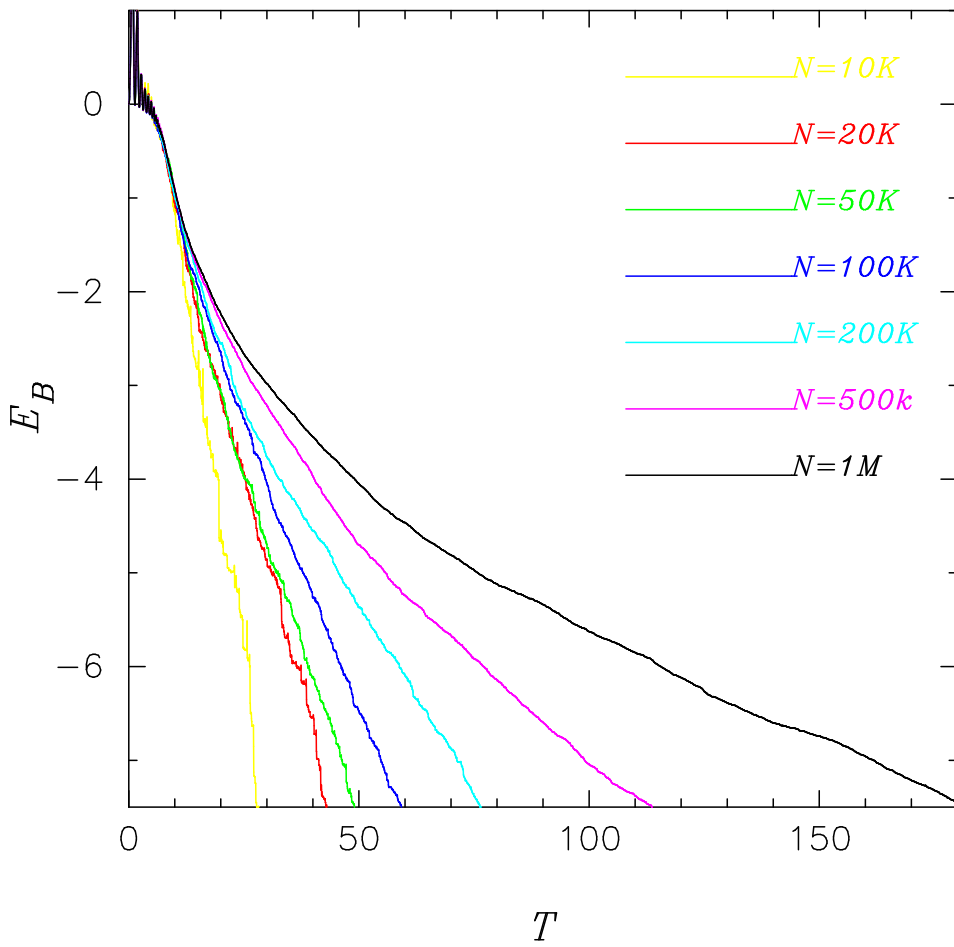
- なるべく単純な初期条件で
- なおかつできるだけ loss cone ができやすい条件で
- 信頼できる計算法で
- 大粒子、長時間計算をする

のが目標。

実際の計算

- King model ($W_o = 7$) 1 つでブラックホール2個置く
- 粒子数 2K — 1M
- $M_{BH} = M_{Gal}/100$
- 直接計算 on GRAPE-6
- フィールド粒子からの力は GRAPE-6、BH からの力はホストで計算

Binding energy



粒子数が大きいほうが
進化が遅いのは確か

問題はどれくらい遅く
なるか

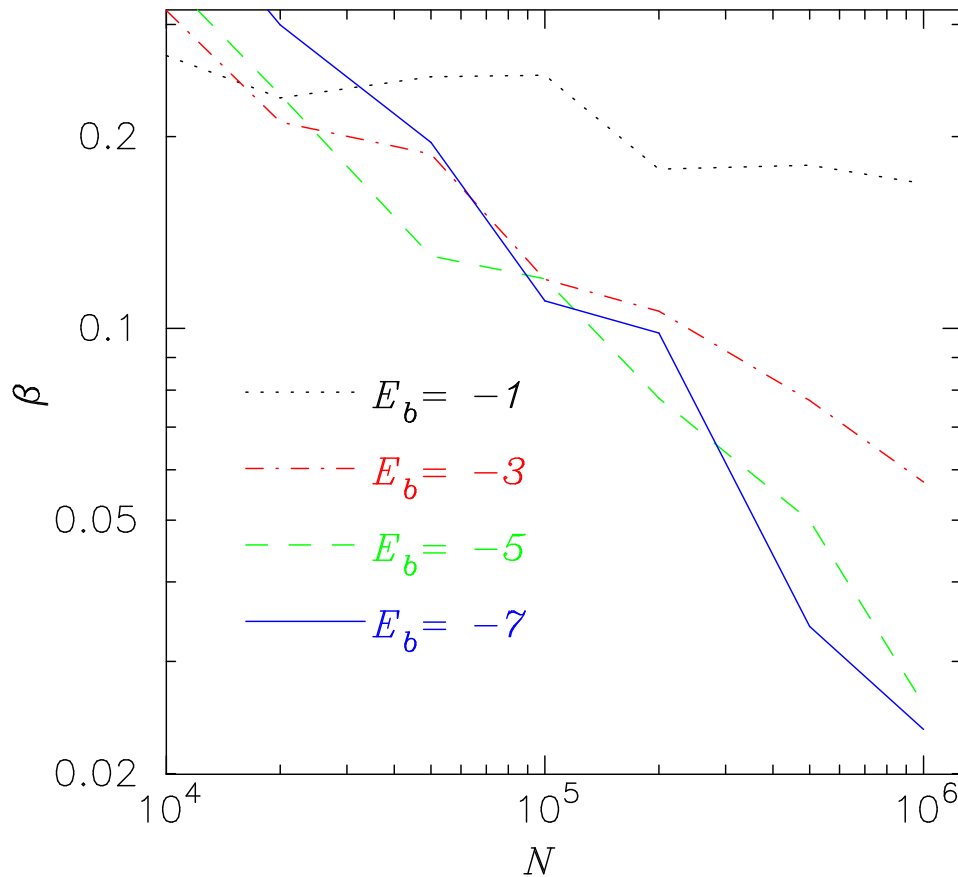
エネルギーの変化率

$$\beta = -\frac{dE_b}{dt}$$

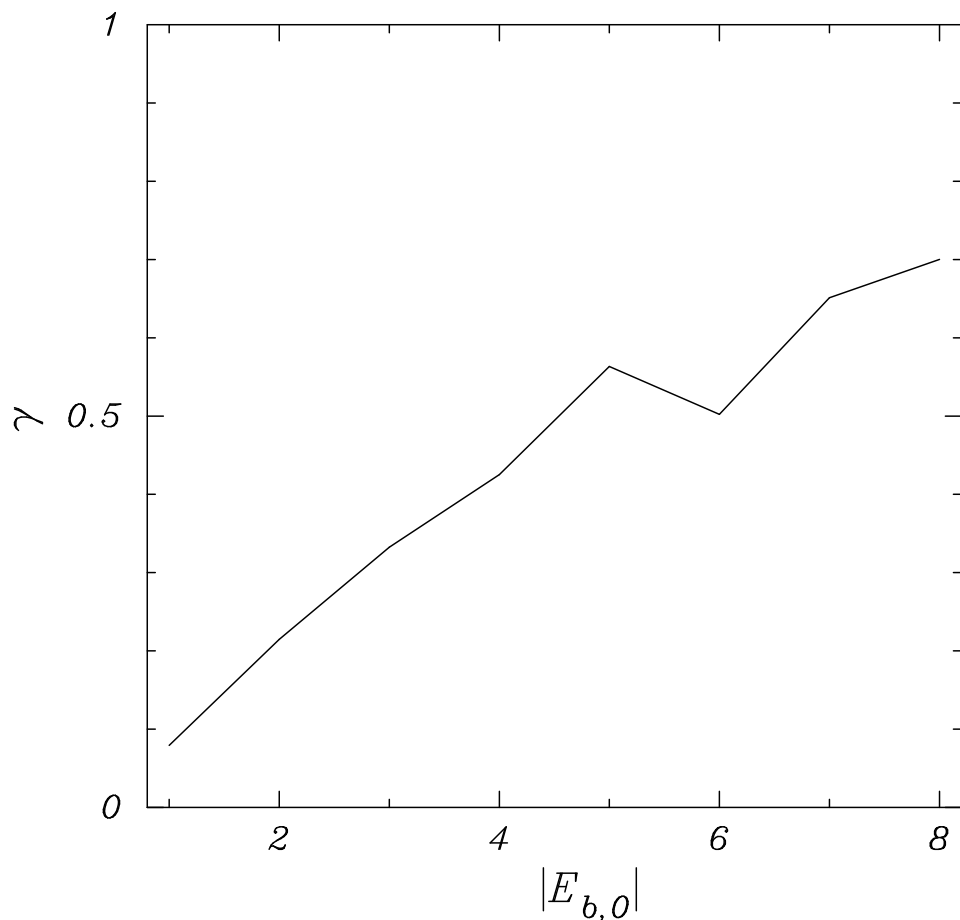
最初のうちは粒子数によらない

後になるとよる。

エネルギーが大きくなるにつれて傾きが大きくなる???



傾きと結合エネルギー



エネルギーが大きくなるにつれて傾きはどんどん大きくなる。

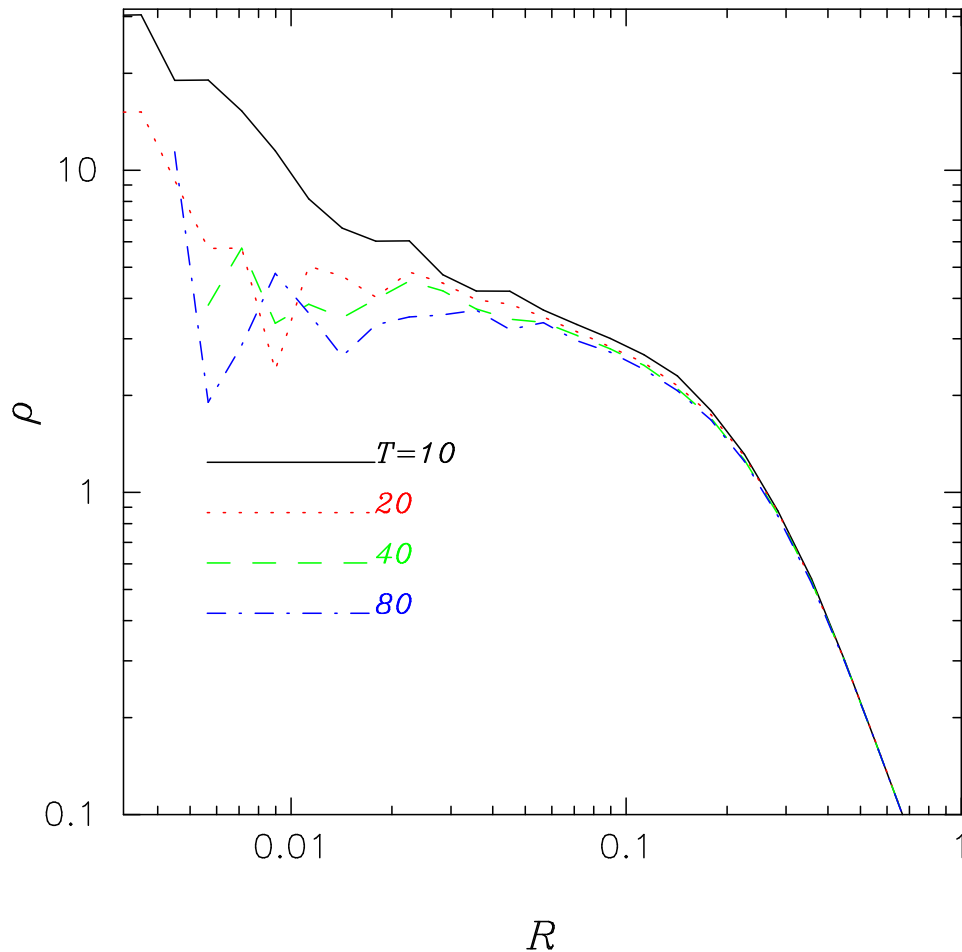
計算できた範囲では収束していない。

まあ、どうなるかといえは 1 にいかないとは言えないのではないか？

結果のまとめ

- Quinlan 1997 とほぼ同じ設定で計算した
- Makino 1997 と同じく、粒子数が大きくなるほど進化が遅くなる傾向は確認された
- 粒子数への依存性は、ブラックホール連星の結合エネルギーが大きくなるにつれて大きくなる
- Loss cone depletion と「矛盾はしてない」

loss cone はみえるか？ — 密度分布



最初あった密度カスプ
が消えてはいる。

ブラックホールの近く
で密度がさがってはい
ない

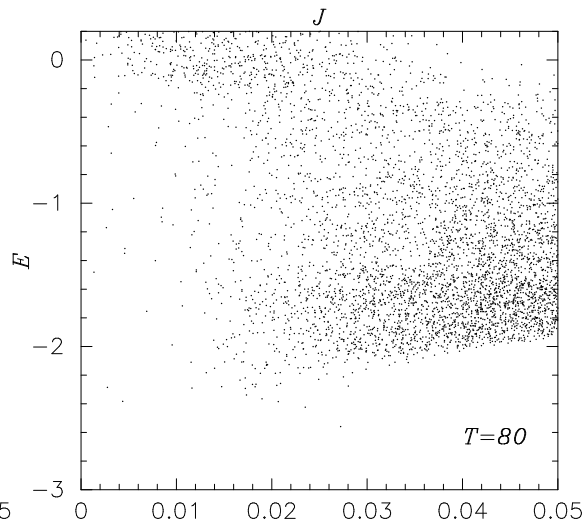
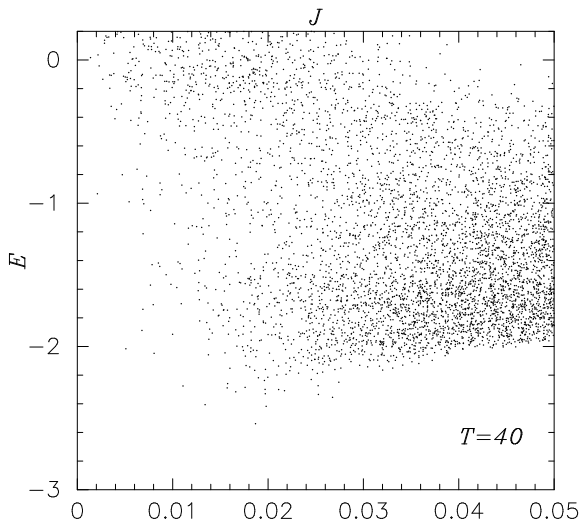
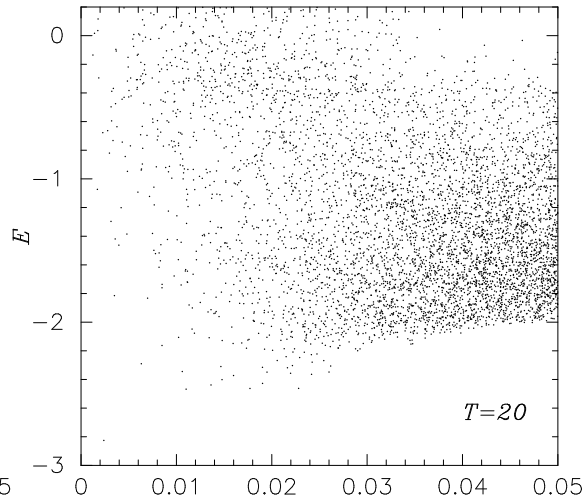
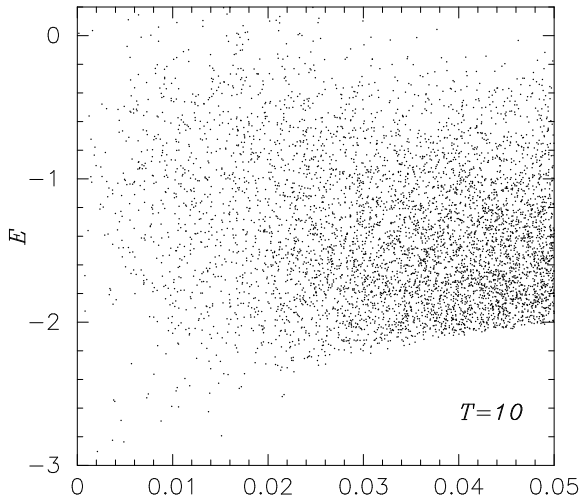
はて？

loss cone はみえるか？ — (E, J) 空間

$J < 0.01$ のところから粒子がなくなっている

J が小さくてエネルギー 0 に近いところには粒子がたまる

明らかに loss cone はできている。



従来の計算の問題は何だったか？

- Makino 1997
 - シミュレーション時間が短かった
- Milosavljević & Merritt 2001
 - 粒子数もシミュレーション時間も足りなかった
- SCF+BH の計算
 - よく分からない、、、

まとめ

銀河中心での大質量ブラックホール連星の、周りの星との重力相互作用による軌道進化を、従来の計算より信頼できる計算コードで、大粒子で長時間積分した。

その結果

- まともな計算コードで
- 十分大きな粒子まで、十分長時間

計算すれば loss cone depletion は起きるということがわかった。

つまり:

大質量ブラックホール連星は星との相互作用だけでは重力波が効くところまで軌道が縮まない。