SPH の話

牧野淳一郎

2012/9/24 惑星形成理論研究会

話の概要

- SPH には、いいところもあれば悪いところもある
- いいところは、ラグランジュ法なので構造形成や変形に強い、密度構造の発展に自動的に追従する、
- 悪いところは、、、、

話の概要

- SPH には、いいところもあれば悪いところもある
- いいところは、ラグランジュ法なので構造形成や変形に強い、密度構造の発展に自動的に追従する、
- 悪いところは、、、、なんだか沢山あると言われている

話の概要

- SPH には、いいところもあれば悪いところもある
- いいところは、ラグランジュ法なので構造形成や変形に強い、密度構造の発展に自動的に追従する、
- 悪いところは、、、、なんだか沢山あると言われている
- どういう悪いところがあって、どんな対策がなされているか、どうしようもないもののあるのか？というような話をする。

話の順番

- SPH の基本的な定式化
- 欠陥のリスト
- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面
- その他
- まとめ

SPH の基本式

ある物理量 f の推定

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle(\vec{\boldsymbol{x}}) = \int \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}}')\boldsymbol{W}(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}')\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{x}}'. \tag{1}$$

密度の推定

$$\boldsymbol{\rho}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \sum_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{W}(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}), \tag{2}$$

SPH 近似

$$\langle \boldsymbol{f} \rangle = \sum_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{j}} \frac{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{j}}}{\boldsymbol{\rho}(\vec{\boldsymbol{x}})} \boldsymbol{W}(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}). \tag{3}$$

SPH の基本のつづき (1)

f の微分: $\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle$ で、以下の恒等式

$$1 = \sum_j m_j \frac{1}{\rho(\vec{x})} W(\vec{x} - \vec{x}_j). \tag{4}$$

を使って、さらにもうちょっと近似して

$$\langle \nabla f \rangle(\vec{x}) \sim \sum_j m_j \frac{f(\vec{x}_j)}{\rho(\vec{x}_j)} \nabla W(\vec{x} - \vec{x}_j). \tag{5}$$

SPH の基本のつづき (2)

運動方程式は $-\frac{1}{\rho}\nabla P$ を計算する。この時に恒等式

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = \frac{P}{\rho^2}\nabla\rho + \nabla\frac{P}{\rho^2}. \tag{6}$$

を使って対称化すると

$$\dot{v}_i = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}W(x_i - x_j), \tag{7}$$

になる。

SPH の欠陥のリスト

- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

こんな色々問題点があるなら メッシュのほうがよくないか？

- まあそうかも？
- とはいえ、メッシュにはメッシュの問題がある。
  - 低温で自己重力も効くディスクはオイラー法では非常に大変
  - 原理的には、タイムステップが格子マッハ数に比例、必要な計算精度はマッハ数の 3 乗に比例
  - AMR の並列化はそれだけで一生が終わるくらい大変
  - moving mesh という話もあるが、、、

SPH の欠陥のリスト

- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

人工粘性

- 衝撃波は流体の運動方程式だけからはでてこない。
- なので、なんらかの方法で扱う必要あり
- メッシュでは、リーマンソルバが普通。ショックのところでは解析解を使う。
- SPH では、人工粘性を入れるのが普通

人工粘性の問題

- ショックがなまる — 但し、 SPH ではあらゆるものがどうせ必ずなまるので、これは問題ではないという主張もある。
- ショックがないところでも粘性が働く。色々な流れが勝手に減衰して消える
  - 音波
  - 渦 (差動回転)
- ガス円盤が勝手に落ちたりする

人工粘性の形

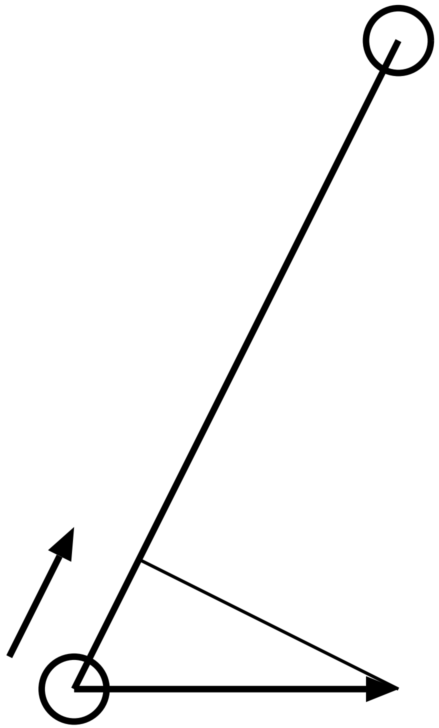
$$\dot{\boldsymbol{v}}_i = -\sum_j m_j \Pi_{ij} \nabla W_{ij} \tag{8}$$

$$\Pi_{ij} = (\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2)/\rho_{ij} (\text{近づいているとき}) \tag{9}$$

$$\mu_{ij} = (h_{ij} \boldsymbol{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_{ij})/r_{ij}^2 \tag{10}$$

みたいな感じ

そもそも気になること



- ショックにたいして粒子が斜めの位置にあると粘性項が弱くなる
- ショックの向きに対してあさっての方向に力をかけて速度を止めようとしている。

色々な改善案

無限に沢山ある $=$ 確立したものはない。
広く使われているもの:

Balsara Switch $|\nabla\cdot v|/(|\nabla\cdot v|+|\nabla\times v|)$

これはシアーへの補正だけ (あとで詳しく)

SPH の欠陥のリスト

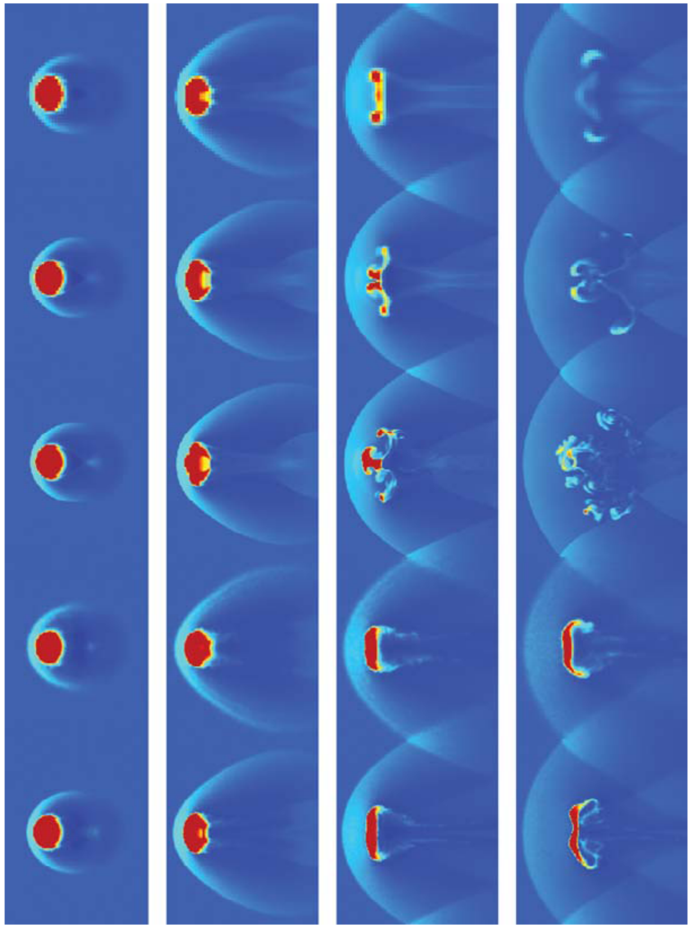
- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

SPH と接触不連続、KH 不安定

Agertz et al (MN 2007, 380,963)

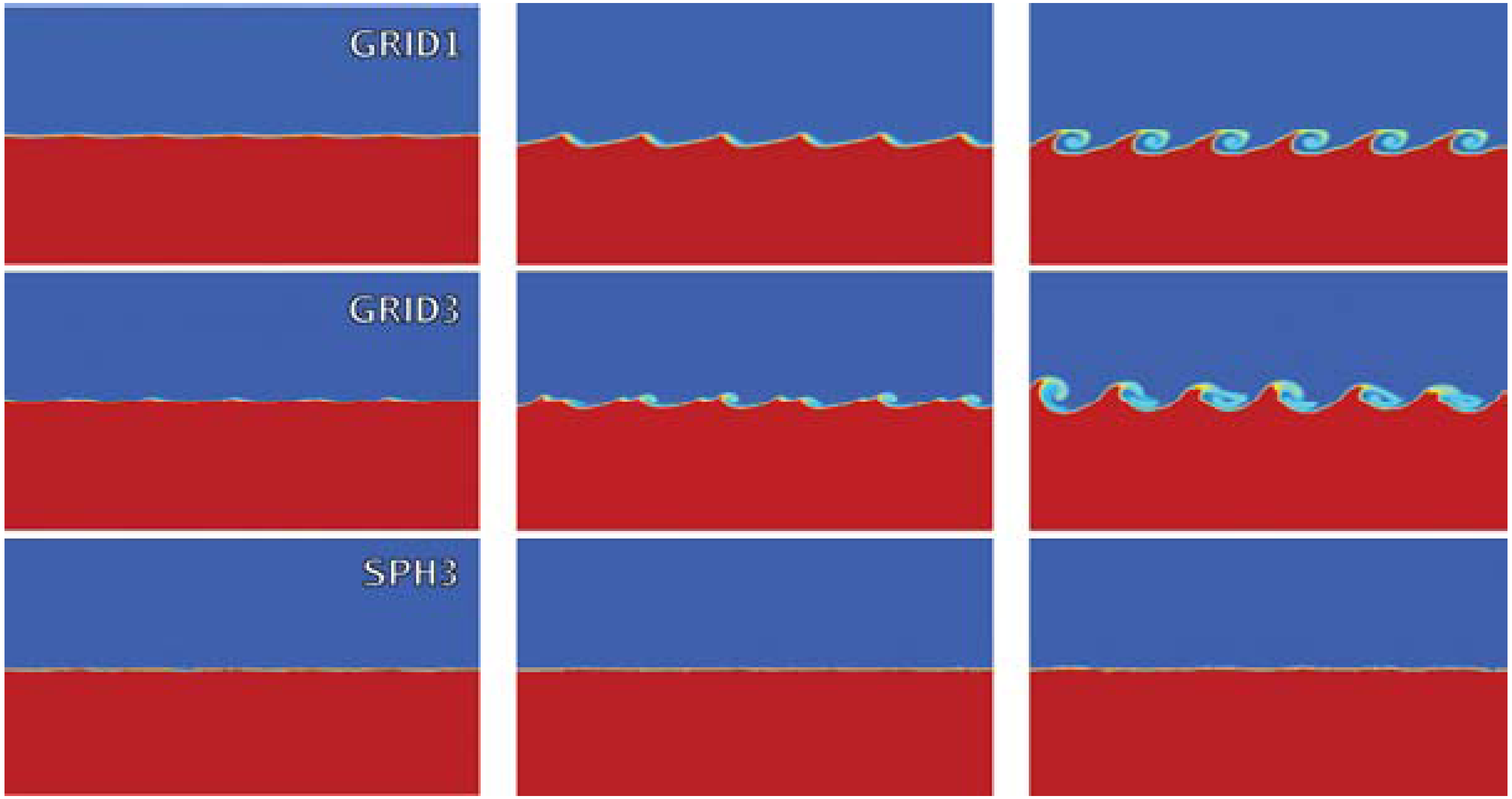
- SPH と Grid コードで、「Brob test」の答が全然違う
- もっと簡単な Kelvin-Helmholtz 不安定 (計算は 3 次元) でも全然違う
- SPH だめじゃん

どれくらい違うか (1)



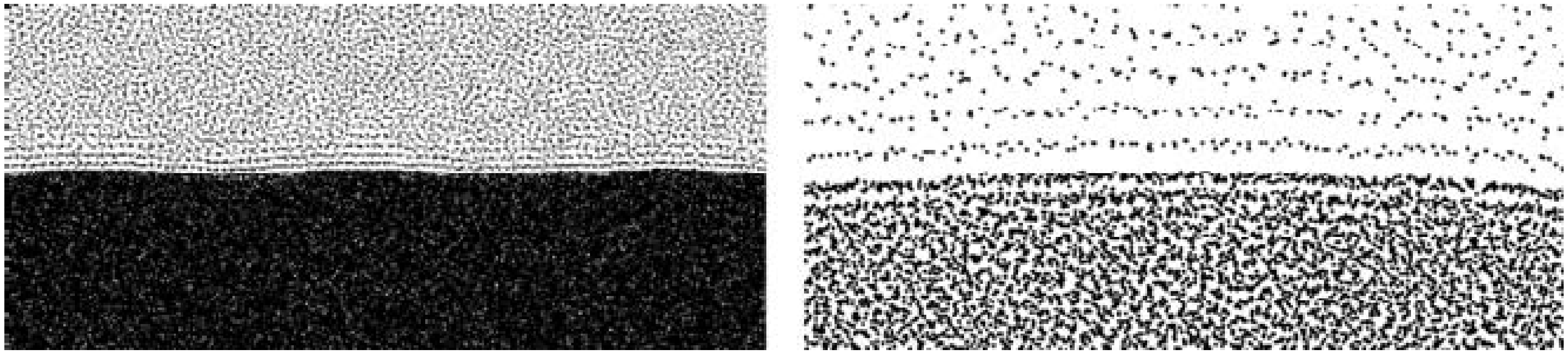
- 周りよりつめたい (温度 1/10､、密度 10 倍) ガスの球を超音速で動かす
- 上から 3 個は Grid
- 下の 2 つは Gasoline (下は 10M 粒子)
- SPH では 境界での不安定が起きないで、冷たい流体が固まりのまま。

どれくらい違うか (2)



SPH では KH 不安定が起きない。

どれくらい違うか (3)



2 流体の境界面で妙な隙間ができる。このため力が働かない？

密度不連続面での振る舞い

通常の SPH では、変形の 2 箇所で ρ の微分可能性を仮定している。以下の 2 つの「恒等式」である

$$1 = \sum_j m_j \frac{1}{\rho(\vec{x})} W(\vec{x} - \vec{x}_j). \tag{11}$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = \frac{P}{\rho^2}\nabla\rho + \nabla\frac{P}{\rho^2}. \tag{12}$$

SPH でカーネル推定した密度は滑らか。このため、

- 接触不連続の低密度側では、密度を過大推定、高密度側では過小推定する
- その結果、圧力、その空間微分もデタラメになる。結果として粒子が再配置される

対策

「根本的」な理由:

> ρ は滑らかだけど u (内部エネルギー) はジャンプがあるまま。

この観点では、u を滑らかにすればよい。色々提案あり。

- u にもカーネル推定した量を使う
- u を拡散させる (人工熱伝導)
- 質量密度でない密度 (数密度とか) を使う

それぞれ、それなりにうまくいくケースもある。

新しい提案 — 思想

圧力が本来変わってないのに、密度が不連続なだけでおかしなことが起こるのは何故か？

物理量 (とその微分) の推定式に密度を使うから:

$$\langle f\rangle(\vec{x}) = \sum_j \frac{m_j f(\vec{x}_j)}{\rho(\vec{x}_j)} W(\vec{x} - \vec{x}_j). \tag{13}$$

ここでやっていることは、本質的には体積要素 $d\vec{x}$ を $m_j/\rho(\vec{x}_j)$ で置き換えているだけ。

粒子の占める体積の推定さえできれば別に何を使ってもいいはず

新しい提案 — 原理

質量密度の代わりに何を使うか？

気体 (理想気体) は状態方程式 $PV = nRT$ で規定される。ここにはそもそも質量密度とかない。右辺は本質的には熱エネルギー (に比熱による係数かけたもの)

内部エネルギー密度 (結局圧力と同じ) を使えばどうか？
粒子当りの内部エネルギーは今の SPH でも時間発展させる量なので、単位体積当りの内部エネルギー、つまり圧力の空間分布は質量密度を使わなくても計算できる。
接触不連続では圧力は (もちろん) 連続なので、変なことは起きないかもしれない。

定式化(1)

粒子当りの内部エネルギーを

$$U_j = m_j u_j, \tag{14}$$

で定義(u は単位質量当り)して、内部エネルギーの空間密度を

$$q = \sum_j U_j W(\vec{x} - \vec{x}_j). \tag{15}$$

で定義する。そうすると、他の物理量のカーネル推定は

$$\langle f \rangle(\vec{x}) = \sum_j \frac{U_j f(\vec{x}_j)}{q(\vec{x}_j)} W(\vec{x} - \vec{x}_j), \tag{16}$$

空間微分は

$$\langle \nabla f \rangle(\vec{x}) = \sum_j \frac{U_j f(\vec{x}_j)}{q(\vec{x}_j)} \nabla W(\vec{x} - \vec{x}_j). \tag{17}$$

定式化(2)—エネルギー方程式

普通は運動方程式を先に導くが、どっちかを決めるともう片方が決まるので簡単なこっちを先に。エネルギー方程式は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho}\nabla \cdot \vec{v}. \tag{18}$$

速度の発散の SPH 表現は、今回は

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j)\frac{U_j}{q_j}\nabla W(\vec{x} - \vec{x}_j). \tag{19}$$

P/ρ だが、圧力は

$$P_i = (\gamma - 1)q_i. \tag{20}$$

定式化(3)—エネルギー方程式つづき

密度がでてくるように見えるのは、左辺が単位質量当りだから。これを U の微分に直すには、形式的には

$$\rho_i = \frac{m_i q_i}{U_i}. \tag{21}$$

という関係式を使う。そうすると、エネルギー方程式が

$$\dot{U}_i = \sum_j (\gamma - 1)\frac{U_i U_j}{q_j}(\vec{v}_i - \vec{v}_j)\nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j). \tag{22}$$

定式化 (4)—運動方程式

エネルギー方程式があるので、エネルギー保存から運動方程式を導く。2 粒子の、2 粒子の相互作用による内部エネルギー変化は

$$\dot{U}_{ij} + \dot{U}_{ji} = (\gamma - 1) U_i U_j \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j} \right) (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j). \quad (23)$$

で、これが運動エネルギー変化

$$\frac{m_i m_j}{m_i + m_j} (\vec{v}_i - \vec{v}_j)(\dot{v}_i - \dot{v}_j). \quad (24)$$

と逆符号で絶対値が等しいので、速度変化が

$$(\dot{v}_i - \dot{v}_j) = -(\gamma - 1) \frac{m_i + m_j}{m_i m_j} U_i U_j \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j} \right) \nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j), \quad (25)$$

定式化(5)—運動方程式つづき

重心が保存するように分配しなおすと

$$\boldsymbol{m_i \dot{v}_i = -\sum_j (\gamma - 1) U_i U_j \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_j}\right) \nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j).} \quad (26)$$

- **割合具合よさそうな対称化された形が何故かでてくる。**
- **右辺には質量に依存する量がない。**
- $1/q_i$ **は対称化のためにでてくる項。**SPH **近似の範囲で恒等的に** 0**。**

実装の結果

従来のSPH1

新しいSPH1

従来のSPH2

新しいSPH2

これに関しては上手くいっているのではないか？

非理想気体への一般化の思想

状態方程式が理想気体と違う時にどうすればいいか？
(今日は省略)

非理想気体、その他の問題

- 非理想気体でも圧力ベースの定式化はできる
- 欠点: 大きな圧力勾配 (表面とか衝撃波) に弱い
- 感覚的には、SPH の既存の定式化には何かまだ根本的に不自然なところが残っている。

SPH の欠陥のリスト

- 人工粘性
- 接触不連続
- せん断 (シアー) 流
- 表面

シアー

現象としては:

- 渦が回らない
- 降着円盤が落ちる (10 回転くらいしかもたない)

ということが大昔から知られている。
理由: 良くわかっていない、というか、いくつか説がある。

- 人工粘性
- 「粒子ノイズ」
- それ以外

人工粘性

- 単純な Monaghan-Gingold viscosity: 基本的に 2 粒子が近づいているとブレーキ
- これは色々問題
  - 只の音波も減衰する
  - シアー流でも粘性働く
- 通常の対応: Balsara Switch $|\nabla \cdot v|/(|\nabla \cdot v| + |\nabla \times v|)$
  - 純粋なシアー流でノイズなければ (ネイバー粒子無限なら) 粘性 0 になるはず
  - 逆にいうと実際には 0 にならない

Cullen and Dehnen

- 色々やっていると論文には書いてある
- 基本的には非線型人工粘性。$\dot{\nabla} \cdot v$ が負の時にだけ人工粘性かける。但し、一度人工粘性かけたら急には 0 にしない (post-shock 振動を抑える)
- Balsara switch をなんだか面倒くさいものに置き換える。(等方な圧縮以外の項全部みる)

色々やって良かったのはこれ、と書いてあるが理屈はないのでこれではどうしようもない

Balsara switch は変じゃないか？

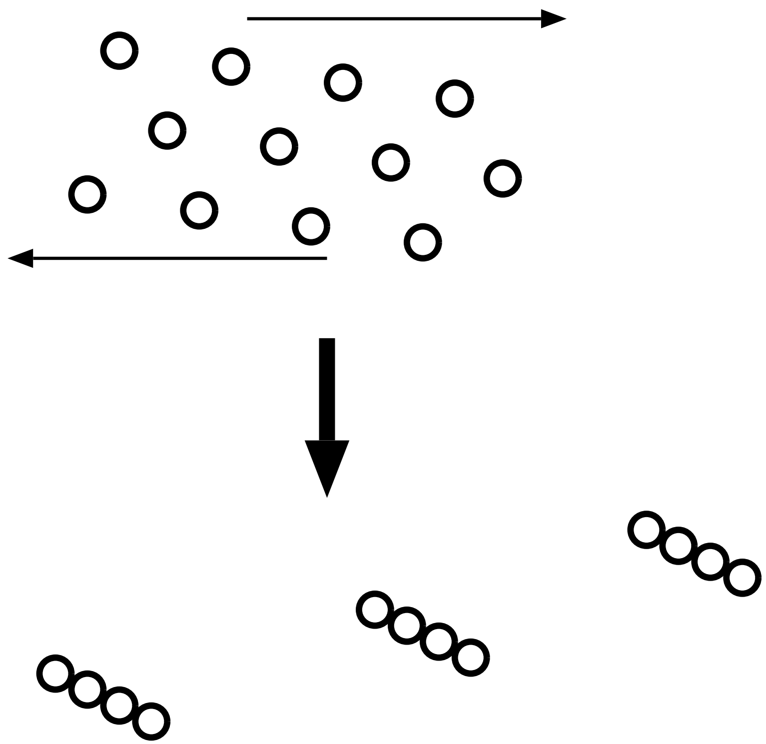
- シアー変形は回転+非等方圧縮・伸長
- Balsara switch は回転をみている
- でも、非等方変形が本当の問題のはず。
- 非等方でも、1 方向の圧縮ならよい、というか、そもそもショックはそういうもの。

考察というよりはまだ妄想

- ショックは本質的に平面的。
- なので、変形の主要な成分が 1 方向の圧縮で、それが大きい時にだけ人工粘性かけるべきでは？もちろん、 post-shock oscillation には対応する必要があるので、なんらかのヒステリシスを入れる。
- 粒子の運動の方向に抵抗を入れるので、粒子間相互作用が中心力にならない。このため、角運動量が保存しなくなる。回転を消すような補正が必要。例えば、ある粒子からその全ネイバーへ力の人工粘性項に由来する力に対して、その回転モーメントをうちけすような項を追加する。

「粒子ノイズ」

- SPH での粒子配置: いわゆる「グラス」、完全に規則的ではない
- これにシアーとか微分回転を与えると最終的にはポアソンゆらぎがでてくる
- 途中にはもっとでたらめなものもでてくる
- いわゆる今枝問題



対応

- Imaeda and Inutsuka 2002 の方法: 流体の速度と粒子の速度を分離、流体の速度は SPH カーネルかけた速度で、これが SPH 運動方程式を満たすように粒子の位置、速度を陰的に決める。
- これは解が一意かどうか疑問。前ページの例では対称性からこの方法では数値解に変化ないはず。
- 実際に収束が悪いことがわかっている

どうなって欲しいか？

- シアー流に対して平行に粒子がならんでいれば今枝問題は起きない
- 降着円盤ならリング状
- 圧力が十分あればそういう再配置は起きる。
- 圧力が弱くても、局所的な平均粒子間距離より近くでは斥力が働くようにすれば再配置はできる
- これを運動方程式に入れるとしかしこれ自体が拡散的に働く。シアー流で粒子が振動する。但し、斥力が遠方では負になって一様密度で平均 0 になるなら少なくともネイバー数無限大の極限では元の SPH 方程式と誤差の範囲で一致。
- 運動方程式にはいれないで動かすだけ、というのもありえる。内部エネルギーは補正がいる。

綺麗にならんでいれば大丈夫か？

- 対称性があれば大丈夫
- ということは、一般には完全な対称性はないので何か起こる気がする。

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○　　○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○　　○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○　　○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

- 本質的には、粒子が横を通り過ぎると必ず力が変化する、というのが問題。
- 変化しない定式化: SPH ではなく MLS とか MPS ならできるが、大きな密度変化等がないという仮定が入る

まとめ

- あんまりまとまってない
- シアーの扱いは Balsara switch で解決というわけでは全然ない
- 色々な論文があって全然いっていることが違う
- まだ何か根本的におかしいような気がする