1 次元自己重力系における熱力学的緩和について

牧野淳一郎（東大天文）

大体

一次元自己重力系における「遅い緩和」、「カオス的遍歴」、「巨視的緩和」とはいったいなにか、というようなことを、数値実験とその解析に基づいていろいろ考えてみる。

というような話をするつもりです。

詳しくは astro-ph/9903238 (PTP に投稿中) を御覧下さい。

話の構成

1. 初めに — 一次元系と熱力学的緩和についての偏見の入ったまとめ
2. 一次元自己重力系とは？なにが面白いのか？
3. 最近の研究 (**Tsuchiya** *et al.* を中心に)
4. 本研究の目的
5. 結果
6. 解釈
7. 残った問題

初めに

統計力学の基礎が本当にしっかりしているのかどうかというのは難しい問題：

- なぜアンサンブル平均というものが可能か?　(エルゴード問題)

エルゴード性（大雑把にいって）：熱平衡にある系の任意の巨視的な状態量は、その系の到達可能な位相空間全体で平均をとることによって与えられる。これは、統計力学の（まあ）基本的な仮定

ところが、エルゴード的であると証明されているシステムというのはほんのひとにぎりくらいしかない（シナイのビリヤードとか）

では、なぜ大抵の大自由度システムで統計力学がなり立つのか？ (ほんとうになりたつのか？)

よくある「説明」

パターン (a):
大自由度系は強くカオス的であり、したがってエルゴード的と期待できる。

これはあんまり本当とはいい難い。例えば重力多体問題の場合、

(a) カオス性の強さとリヤプノフ指数は関係がありそうだが、例えば最大リヤプノフ指数と緩和時間はなんの関係もない。（最小リヤプノフ指数と緩和時間に関係があるとかそういうのはさておき）

(b) 同様に、無限自由度の時、カオス性は強いと思うわけだが緩和時間は無限大になる。

というわけで、カオス的であることがエルゴード性の必要条件なのはいいとしても、十分条件かどうかはわからない。

よくある「説明」（続き）

パターン (b):
カノニカル (または量子統計的) 系は本質的に確率的振舞いをするんだから、統計的に扱うのは正当化される。

まあ、それはそうかもしれないけど、では古典孤立系では統計力学は成り立たないのか？

これは（すくなくとも天文学的立場からは）極めてありそうにない話。球状星団の進化や惑星形成は統計力学的（熱力学的）緩和によって進化しているように見える。

大体 N 体計算で統計力学に合わない話が起きるなんてことは聞いたことがない。

「統計力学の基礎」

もう少し話を整理すると、

- 大抵の系は、仮にエルゴード的であったとしても、実際に $6N$ 次元位相空間を埋めつくすための時間は非常に長い（通常の緩和時間よりもはるかに長い）
- （古典系に限れば）カオス的ではあっても決定論的である

では、実際にそういう系はどういうふうに振舞うのか？というのが問題

- 理論的研究
- 数値的にいろんな系を調べる

FPU 問題

数値的に調べるアプローチの多分最初のもの。

- バネでつないだ質点
- 弱い非線形項 (線形なら緩和しないのは明らか)

Fermi, Pasta and Ulam 195x, MANIAC (メトロポリスらが作った IAS コンピュータのコピー) で最初に解かれた理論物理学の問題の一つ。

彼らは、モード間結合のせいでエネルギーはすみやかにいろんなモードにわかれると予想した。

実際に系がしめした振舞いはなんだかよくわからないものであった。

— induction time
— recurrence

FPU 問題の（現代的）解釈

- 単にモード間結合が本当に弱かった
- その結果、モード間をエネルギーは振動するが、なかなか簡単には拡散しなかった。

というわけで、それほど不思議なことではなく、線形に近くカップリングが弱い系ではむしろ普遍的なこと。でも、大自由度系が一般にそうというわけではない。

FPU 系は非線形性が弱く、また相互作用が局所的

長距離相互作用と非線形性

「複雑な」(というよりは、むしろレギュラーな) **FPU** 系の振舞いは、線形に近く(非線形)相互作用が局所的という特殊な性質に由来するもの。

では、長距離相互作用があって非線形性も強ければどうか？

一例: 重力多体系

重力多体系

天文学的に興味があるのはもちろん 3 次元系だが、これは難しい

- $r \longrightarrow 0$ でポテンシャルが発散
- 位相空間が有界でない
- そもそも熱平衡がない

一次元系は簡単そうに見える

- $r \longrightarrow 0$ でポテンシャルも 0 になる。
- 位相空間が有界
- 熱平衡がある

一次元自己重力系

いわゆるシートモデル

$$\Phi_{ij} = Gm_i m_j |x_i - x_j|$$

シート間の力: 一定 (距離によらない)
Hamiltonian:

$$H = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 + 2\pi G m^2 \sum_{i<j} |x_i - x_j|, \qquad (1)$$

計算法：

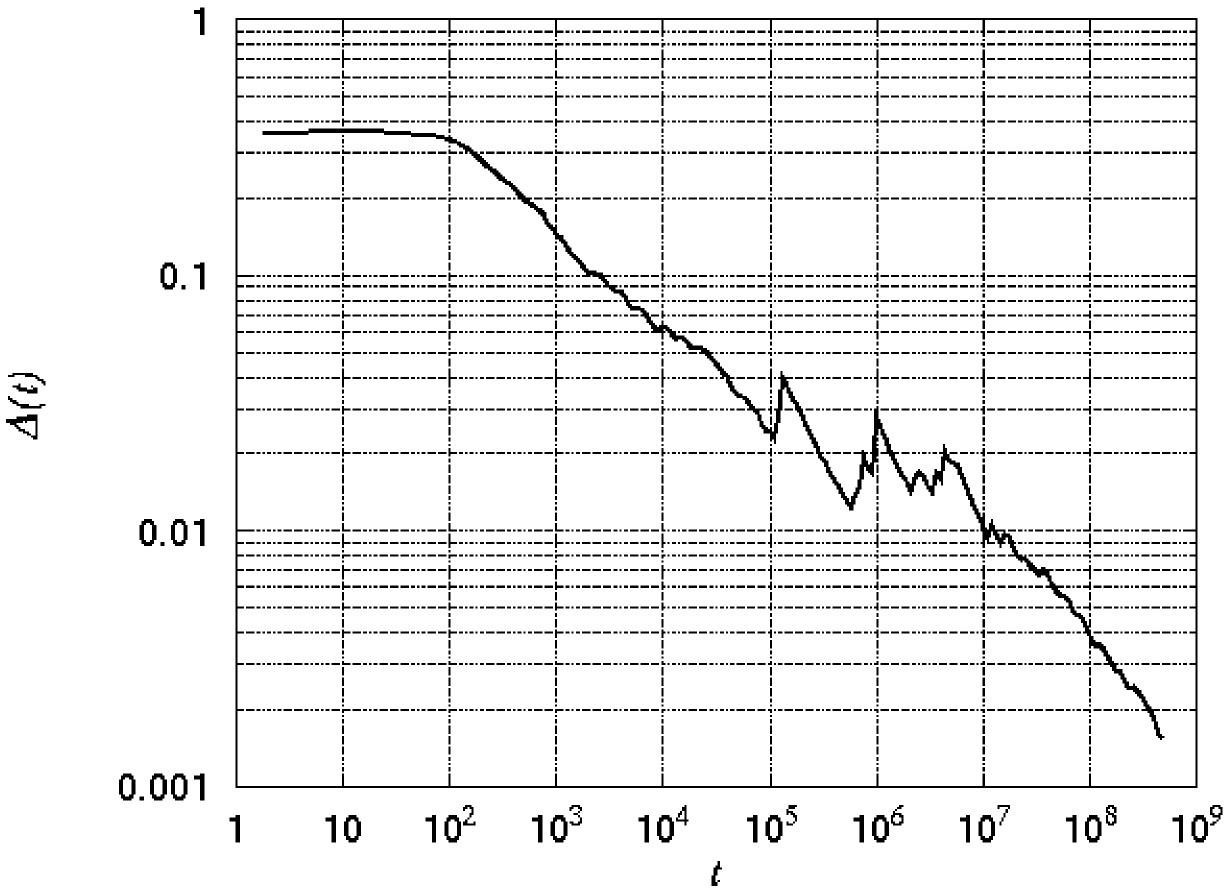
2 枚のシートがぶつかるまでは解析的に解ける

隣合うペアについてぶつかる時刻のリストをつくって、最初にぶつかるものについてそれらが次にどれとぶつかるかを計算するというふうに解をつないでいくことができる。

シートモデル研究の歴史的な流れ

- 最初は銀河ディスクの垂直方向の構造のモデルとして提案された。
- **1960-1980** 年代には、主に **violent relaxation** の理想化したモデルとして調べられた。このころは緩和時間が $O(N^2)$ となんとなく思われていたらしい。
- **1980** 年代はじめに、実は、緩和時間が $O(N)$ であるということが数値実験で示された。
- 最近になって、土屋（および郷田、小西ら）が、もっとずっと長いスケールでの緩和があると主張している。（ダイナミカルタイムの $10^6 N$ 倍とか).

カオス的遍歴?

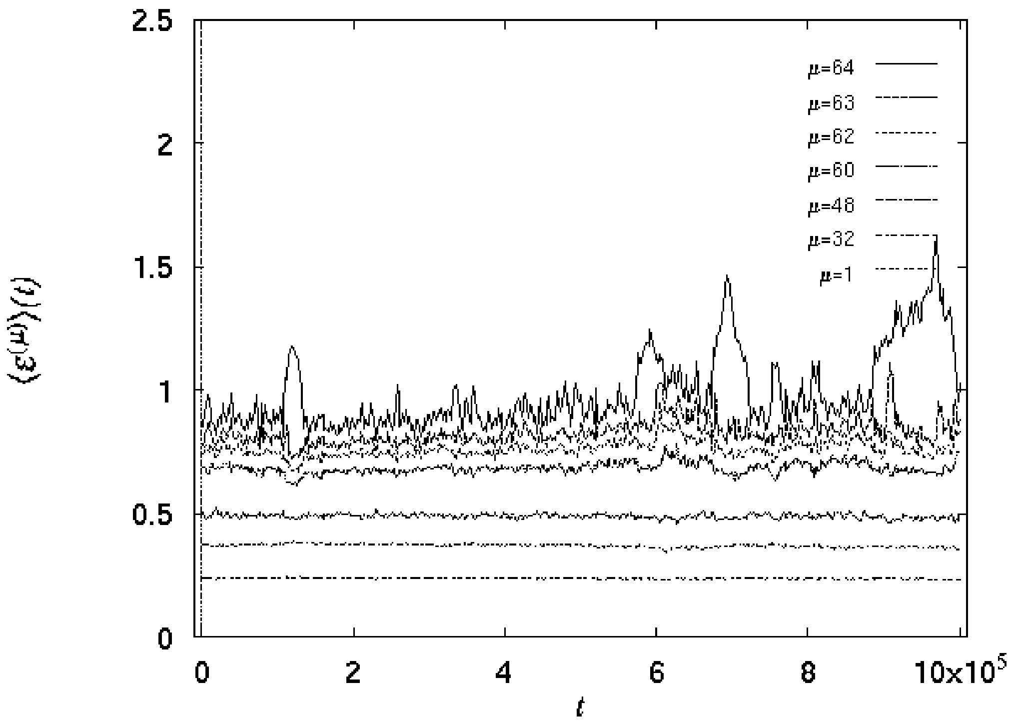


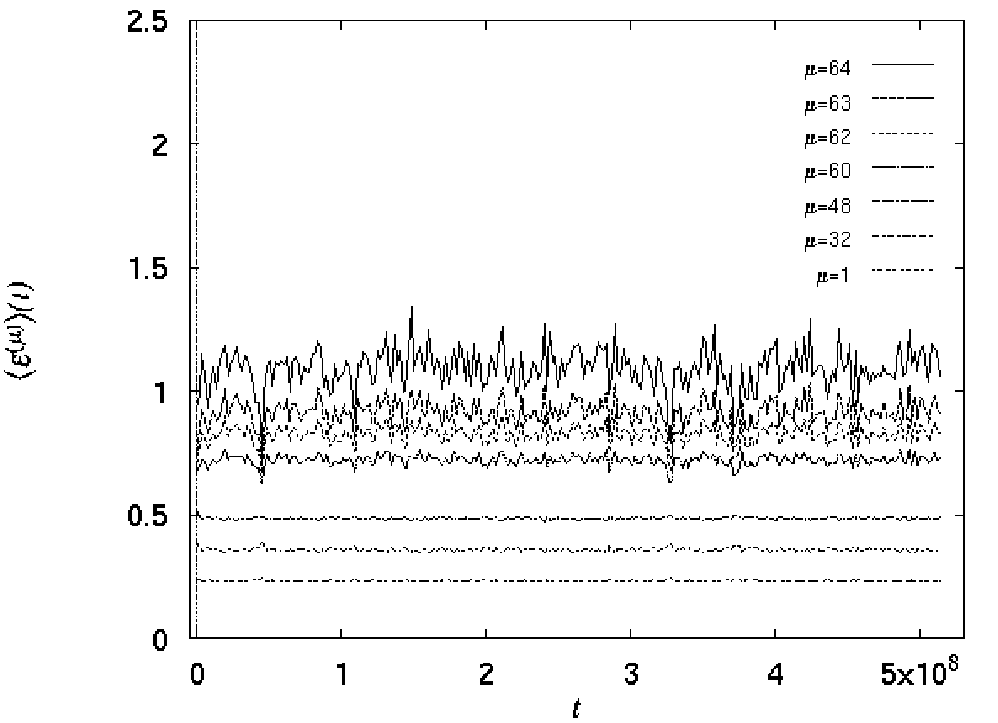
"System does not approach equilibrium monotonically"
何を測っているかというと：

r.m.s. of $< e_i > - e_0$,

ここで e_i はシート i のエネルギー、
$e_0 = 5E/3$ は平均エネルギー。
時間平均は 0 から t まで。

シートのエネルギーの振舞い





土屋他の解釈

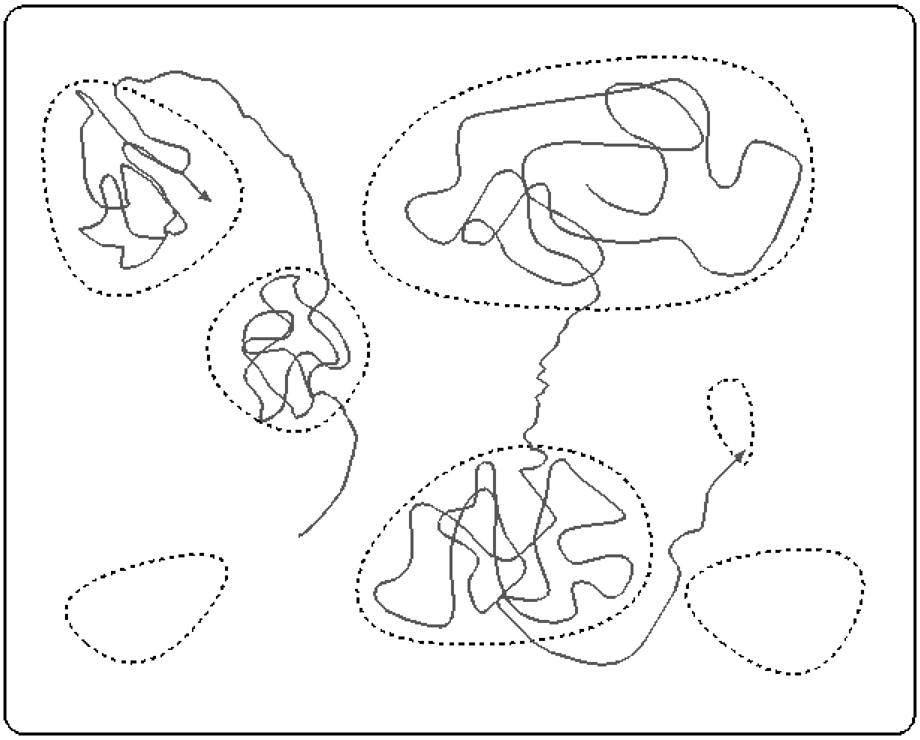


FIG. 17. Basic idea of the structure of orbits in the phase space. The solid lines indicates the orbits, which describes the states of the system. The regions which enclosed by dashed curves corresponds to the quasiequilibria. The paths which connect the quasiequilibrium regions corresponds to the transient states. Actually these structures are fractal.

本当にこんなややこしいものなのか？というのが、ここでの疑問。

というわけで、ここまでが前おき、以下が本論。

数値実験

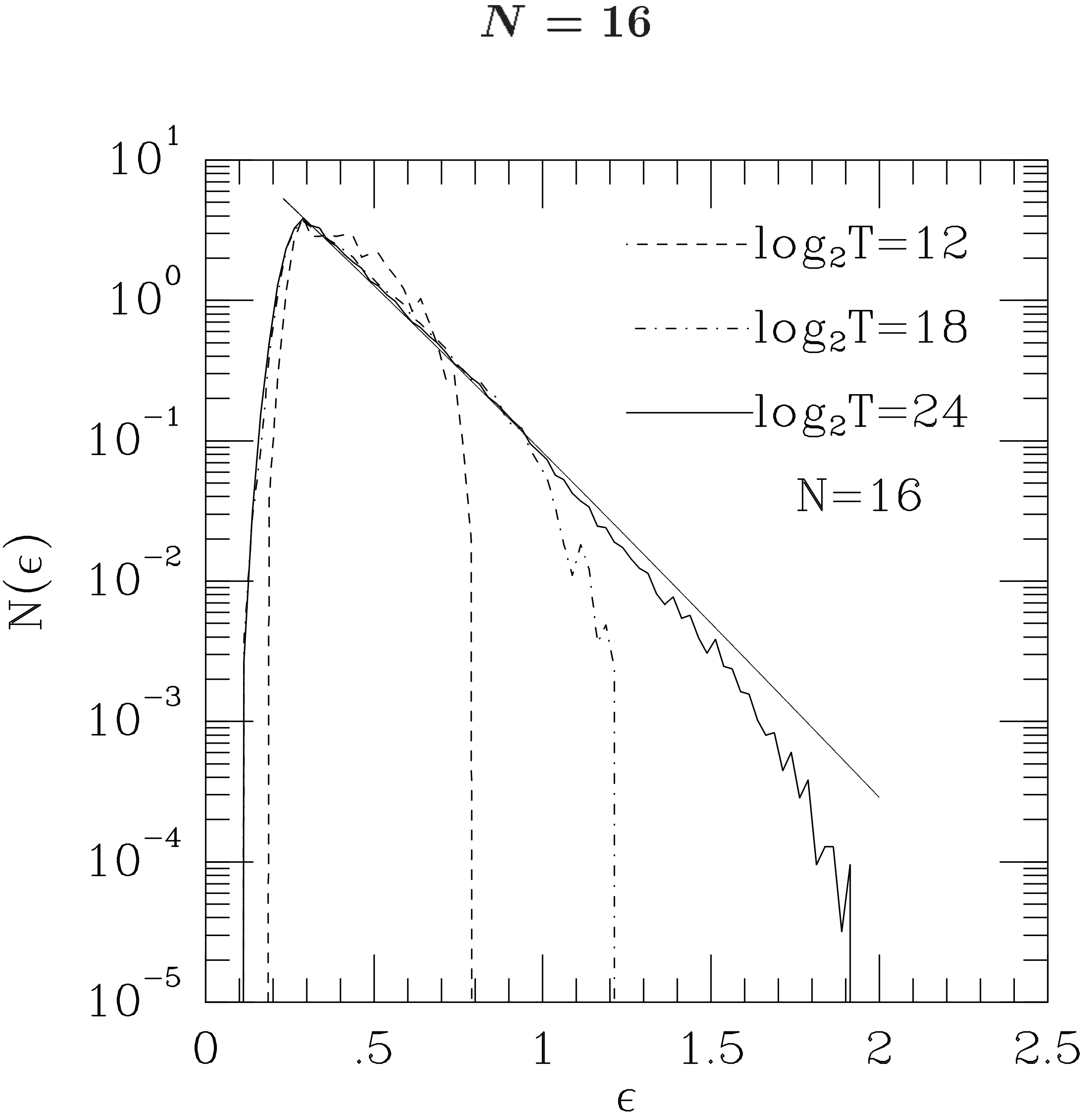
—非常に長いシミュレーションを行なう(10^7 **crossing times** くらいまで)

—時間平均した分布関数とか、緩和時間といった、普通の巨視的な熱力学的量を計算してみる。

$$\downarrow$$

長いタイムスケールの緩和といわれているのは具体的にはなにか？ということを明らかにしたい。

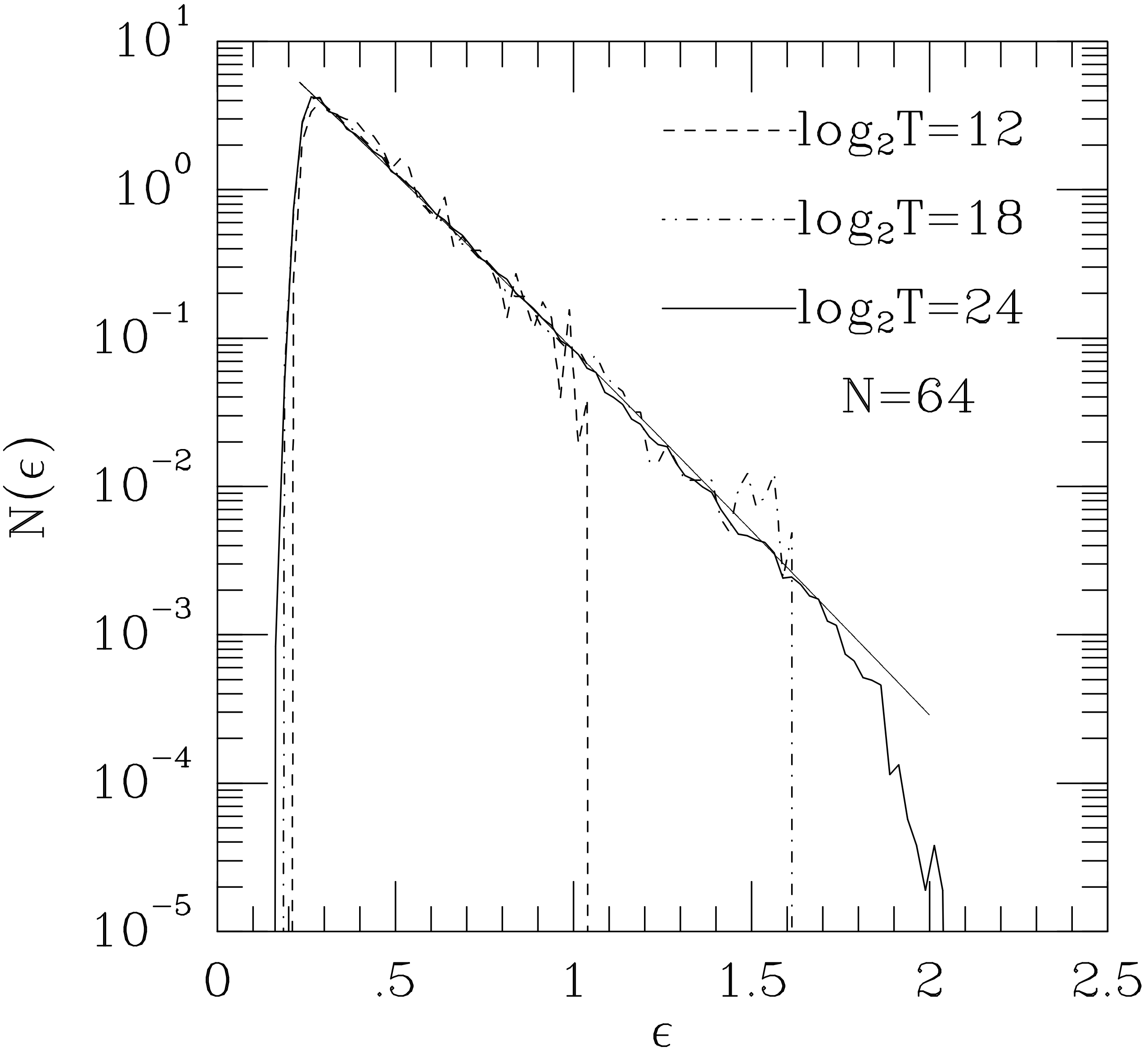
分布関数



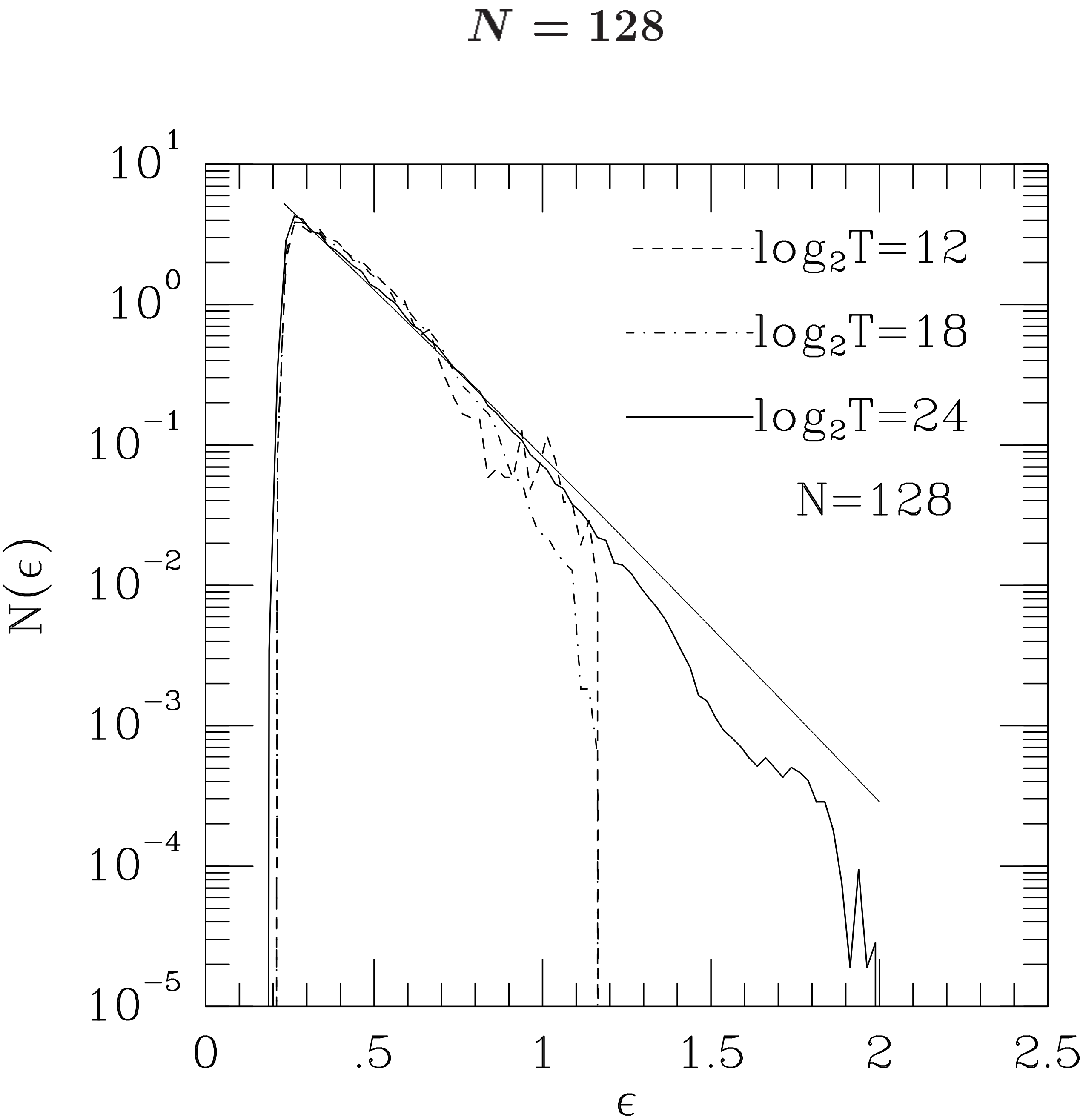
低エネルギー領域はすぐに緩和する。
高エネルギー領域にはなかなか分布が広がらない。

分布関数 (2)

$\boldsymbol{N} = \mathbf{64}$



分布関数 (3)



確かに、分布関数の高エネルギー側が埋まるには、非常に長い時間掛かっている。

何故か？

拡散係数

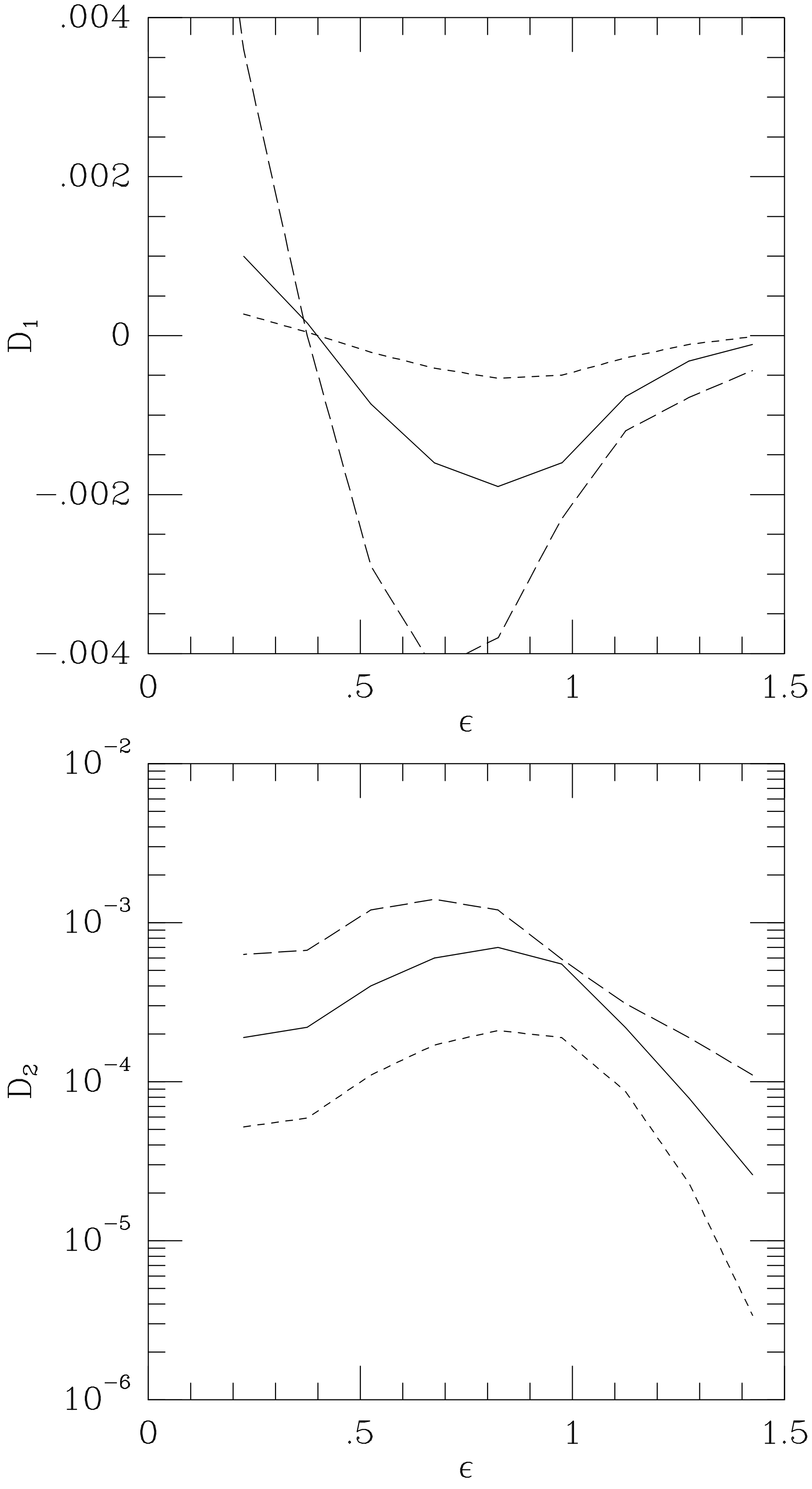
普通に考えれば、（局所的な）緩和時間を決めるのは（局所的な）拡散係数。
1 次、2 次の拡散係数は、（おおむね）

$$D_1 = \frac{< \varepsilon_i(t_0) - \varepsilon_i(t_0 + \Delta t) >}{\Delta t},$$
$$D_2 = \frac{< [\varepsilon_i(t_0) - \varepsilon_i(t_0 + \Delta t)]^2 >}{\Delta t}.$$

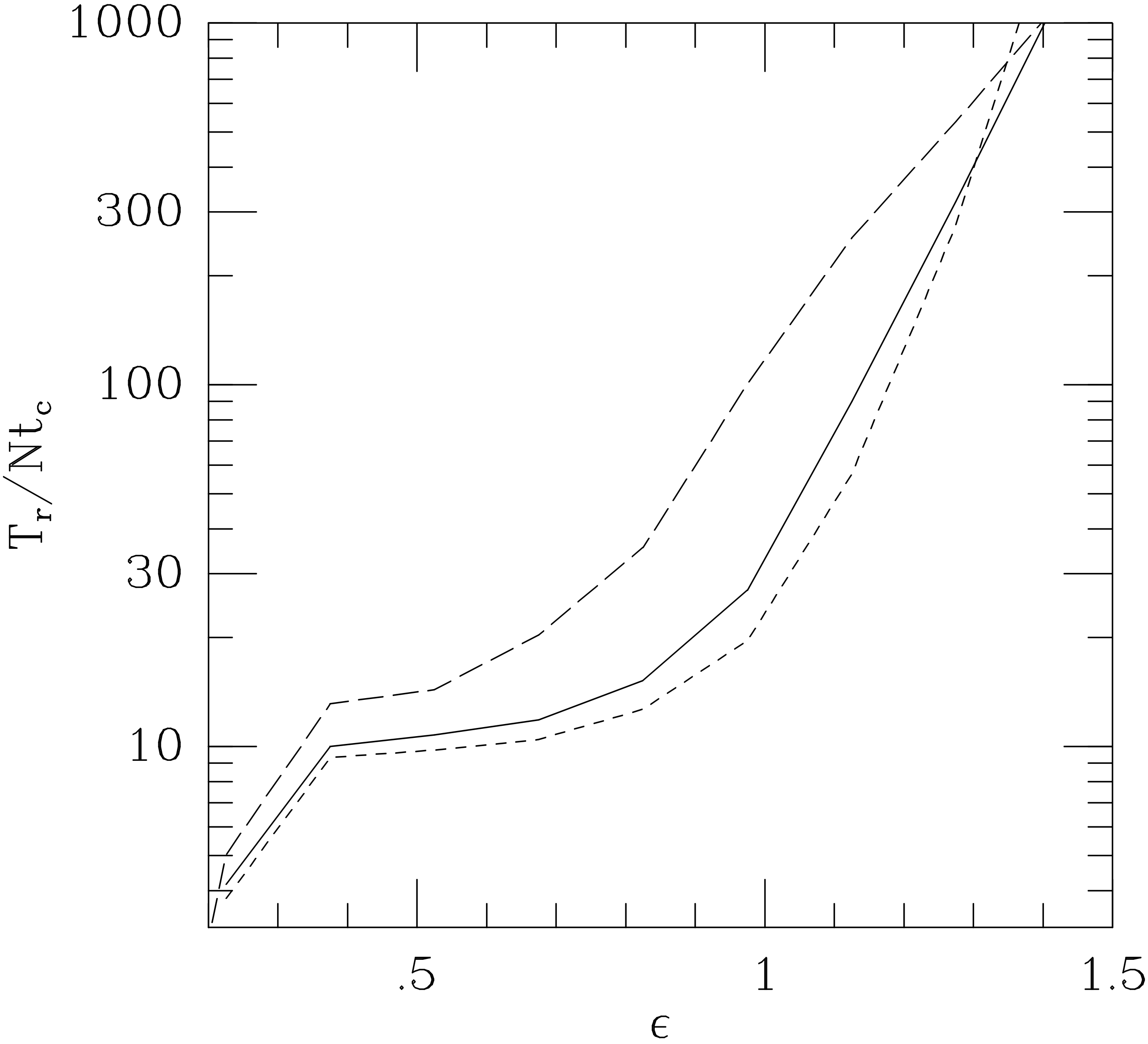
というように書ける。2 次の拡散係数の逆数が緩和時間と思ってよろしい。
以下では下の定義を使う：

$$t_r = \varepsilon^2 / D_2,$$

拡散係数 (続き)



緩和時間



- 緩和時間 $\propto N$
- 高エネルギー側では緩和が指数関数的に遅くなる

解釈 — 「カオス的遍歴」とはなんだったか

高エネルギー側では緩和時間が長い
↓
高いエネルギーを持ったシートは非常に長いタイムスケールでしかランダム・ウォークしない。
↓
良い統計を得るためには十分長時間の平均をとらないといけない。

言い換えれば....

別になにか特別なことが起こっているわけではない。

残った問題 — では何故緩和がそんなに遅いのか?

3 次元系なら当然：高エネルギー領域では密度が小さいから。

1 次元系ではそんなことはない (高エネルギーのシートも系を横断するので平均密度はたいして変わらない)

というわけで、何故遅いのかはいまのところはっきりしていない。

もうちょっと基本的な問題：そもそもシートモデルで緩和が起きるのはどうしてか？

— 場の揺らぎ？

— 共鳴？

まとめ

- 「カオス的遍歴」といった、1 次元自己重力系の「奇妙な」振舞いは別に奇妙でもなんでもなく、単に高エネルギーのシートの緩和が比較的遅いというだけである。同様に、普通の熱力学的緩和とは異なった「巨視的緩和」というようなものがあるわけではない。
- シートモデルの緩和時間は確かに $O(N)$ である。
- 高エネルギーのシートの緩和が非常に遅い理由はいまのところ良くわからない。